

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra informatiky a výpočetní techniky

Diplomová práce

Binarizace digitálních hologramů

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně
a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 19. května 2010

.....
Martin Šimek

Abstract

This work focuses on generating digital transmission holograms by using rotation of the angular spectrum. Main feature of this approach is that the angular spectrum can be obtained by the fast Fourier transformation of the optical field. The angular spectrum is defined as a set of vectors that defines front-waves which forms the transformed optical field. Those vectors can be rotated and transformed back to the optical field. The visibility problem is solved by sorting polygons and propagating of the angular spectrum from the back of the scene toward the viewer. Kyoji Matsushima's solution was implemented to generate the optical field. A couple of methods for optical field binarization was studied. A threshold and a detour-phase were selected with respect to the available devices.

Poděkování

Zde bych rád poděkoval panu Ing. Petru Lobazovi, vedoucímu mé diplomové práce, za jeho pomoc při realizaci této práce. Bez jeho vstřícného přístupu a četných konzultací by nebylo možné takto rozsáhlé téma kvalitně zpracovat do podoby diplomové práce.

Obsah

1 Úvod.....	1
2 Světlo.....	2
2.1 Elektromagnetické vlnění.....	2
2.2 Vlnová povaha světla.....	4
2.3 Interference vlnění.....	6
2.4 Helmholtzova rovnost.....	7
2.5 Kirchhoffovo řešení.....	8
2.6 Raileigh-Sommerfeldovo řešení	9
2.7 Huygensův princip.....	10
2.8 Optické pole.....	11
2.9 Úhlové spektrum.....	12
2.9.1 Propagace úhlového spektra.....	14
2.9.2 Rotace úhlovým spektrem.....	15
2.10 Fotometrie.....	16
3 Holografie.....	18
3.1 Záznam hologramu.....	18
3.2 Rekonstrukce hologramu.....	19
3.3 Vztah mezi optickou a digitální holografií.....	22
3.3.1 Difuzéry.....	23
4 Numerické metody.....	24
4.1 Aproximace objektu.....	24
4.1.1 Tečný prostor.....	24
4.1.2 Paralelní prostor.....	25
4.1.3 Trojúhelník v tečném prostoru.....	26
4.2 Povrchová funkce trojúhelníku.....	26
4.3 Vzorkování.....	28
4.4 Získání úhlového spektra.....	29
4.5 Propagace úhlového spektra.....	32
4.6 Rotace úhlovým spektrem.....	33
4.6.1 Interpolace hodnot.....	33
4.6.2 Ztráta informace.....	35
4.6.3 Komplexně sdružené vlnoplochy.....	36
4.6.4 Vyvážení hodnot pro rotaci.....	37
4.6.5 Střed rotace.....	38
4.6.6 Jakobián obecné transformace.....	39
4.6.7 Shrnutí rotace.....	40
4.7 Viditelnost.....	40
5 Implementace.....	44
5.1 Pomocná aplikace Rayleigh-Sommerfeld.....	44
5.2 Renderer hologramů.....	44
5.2.1 Třídy.....	45
5.2.2 Ostatní kód.....	47
5.3 Binarizace Hologramů.....	47
5.3.1 Detour-phase.....	48
5.4 Metoda prahování.....	50
6 Získané výsledky.....	51
6.1 Numerická rekonstrukce.....	51
6.2 Optická rekonstrukce.....	53
6.2.1 Detour-phase.....	55
6.3 Srovnání s metodou detail-driven.....	55
7 Závěr.....	57

Příloha.....	60
A Uživatelská příručka.....	60
A.1 Program Mrender.....	60
A.1.1 Konfigurační soubor.....	60
A.1.2 Vstupní formát CSV.....	61
A.2 Konverzní aplikace.....	61
A.2.1 Aplikace df2ab.....	61
A.2.2 Aplikace df2pd.....	62
B Překlad.....	62
C Další výsledky.....	63

1 Úvod

Člověk disponuje schopností stereoskopického vidění světa. Bez dalších pohybů tak získává prostorový vjem scény, kterou pozoruje. Existuje mnoho technik jak scénu i s její hloubkou zachytit a následně prezentovat. Každá však klade různá omezení v podobě fixní pozice pozorovatele, speciálních brýlí a speciálního zařízení. Jednotné omezení všech těchto technik je, že pozorovatel má sice prostorový vjem, případně se může pohybovat, ale vždy vidí scénu ze stejné pozice. Jinými slovy nelze se podívat za překážku.

Řešení se objevují v podobě sledování polohy pozorovatele a upravení scény tak, aby obraz odpovídal pohledu z pozorovatelova stanoviště. To však limituje počet pozorovatelů na jednoho a stále neodstraňuje nutnost speciálních brýlí. Vyvstává tedy požadavek na plně auto-stereoskopický vjem, který nijak nelimituje polohu pozorovatele.

Při důkladném prostudování lidského zraku a šíření světla se ukázalo, že scénu lze zachytit tak, aby pohled na snímek poskytoval stejný vjem jako na scénu samotnou. Tento způsob zachycení reality nazýváme holografie. Výsledný snímek, hologram, poskytuje plně auto-stereoskopický vjem, nelimituje pozici pozorovatele a umožňuje vidět za překážky pokud se pozorovatel dívá z takového místa, ze kterého by za překážku viděl ve skutečné scéně. Navíc hologram poskytuje možnost zaostřit do libovolné hloubky a tak může pozorovatel ostře spatřit každou část scény. Jinak řečeno hologram je vždy perfektně ostrý.

Pohodlné prohlížení hologramu je vyváženo jeho složitým záznamem. Zejména v oblasti rozměrů scény a jejího osvětlení jsou zde citelná omezení. Navíc ne vždy snímáný objekt fyzicky existuje a přesto bychom ho rádi zobrazili. Vyvstává tedy požadavek hologram syntetizovat na počítači a následně jej fyzicky vyrobit. Mluvíme o digitální holografii. Ruku v ruce s ní jde digitální rekonstrukce hologramů, protože před samotnou výrobou hologramu je potřeba vidět, zda je správně připraven.

Hologram je záznam stavu světelného pole v době a místě snímání. Pro výpočet světelného pole existuje řada technik založených na matematickém modelu světla. Základní metody sčítají pro každý element hologramu světelné příspěvky všech bodů scény. Vzhledem k velikosti elementu je jich potřeba vykreslit obrovské množství. Při složitosti $O(N^4)$ pro hologram o $N \times N$ prvcích jsou v současné době tyto metody nepoužitelné a slouží pouze jako zdroj referenčních výsledků.

Světelné pole je možné za jistých podmínek chápat jako lineární kombinaci světél přicházejících z nekonečna, takzvaných rovinných vlnoploch. V rovině hologramu tyto vlnoplochy tvoří systém, který lze popsat fourierovými koeficienty, které získáme z Fourierovy transformace. V diskrétní podobě, která je ostatně jediná možná při číslicovém zpracování, lze provést diskrétní Fourierovu transformaci v čase $O(N^2 \log N)$. Tato výpočetní složitost je již použitelná pro dnešní výpočetní výkon. Invariance Fourierovy transformace vzhledem k rotaci umožňuje analyzovat světelné pole v rovinách nerovnoběžných s rovinou hologramu a ty následně sloučit do výsledného hologramu. Objekty tedy můžeme poměrně rychle syntetizovat z různě natočených plošek.

Těžištěm této práce je implementace algoritmu, který s pomocí metody FFT bude syntetizovat optické pole v rovině hologramu, přidá referenční vlnu, získá intenzitu a nad ní provede binarizaci. Ta je nepostradatelná, protože veškeré dostupné technologie umí světlo modulovat pouze tak, že jej propustí nebo nepropustí.

Po dohodě s vedoucím byl větší důraz kladen na zpracování Matsushimova algoritmu pro generování optického pole, protože při jeho implementaci se vyskytla řada problémů, jejichž vyřešení bylo nutné k získání správných výsledků. Binarizace nezůstala opomenuta a byly prostudovány a implementovány metody prahování a detour-phase, která dokonce umí pracovat i s fází.

2 Světlo

Již od dob starověkého Řecka se člověk pokouší porozumět světlu. Tomu, jak se šíří v prostoru a jak se chová při průchodu jiným prostředím. Z té doby máme tabulku lomů světla při přechodu ze vzduchu do vody sestavenou Claudiem Ptolemaiem ([Feynman00], str. 347). Lom světla plně analyticky popsal až Pierre de Fermat kolem roku 1650, kdy zveřejnil princip nejkratšího času dnes známý jako Fermatův princip. Zároveň tím popsal princip faty morgány a čočky. Ukázal, že dokonalá čočka musí být tvořena povrchovou křivkou čtvrtého řádu, nikoliv částí kulové plochy. V neposlední řadě demonstroval, že parabola je v nekonečnu ideálním vyduťtým zrcadlem soustředujícím dopadající světlo do jednoho bodu, ohniska.

Tím spolu s Huygensovým-Fresnelovým principem položil základy vlnové optice. Hermann von Helmholtz na základě zkoumání akustiky ztotožnil světlo s harmonickým kmitáním. Spolu s Gustavem Kirchhoffem tak vytvořili matematický vlnový model světla. Ten popisoval chování světla za clonou v poloprostoru. Jejich model trpí jistou matematickou nekonzistencí, kdy je nutno uvažovat okrajové podmínky. Tuto drobnou nekonzistenci odstranil lord Rayleigh a Arnold Sommerfeld vhodnou volbou takzvané Greenovy funkce.

Veškeré vlnové teorie o šíření světla vycházejí z převratného objevu elektromagnetického vlnění, který učinil James Clerk Maxwell, když pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic předpověděl elektromagnetické vlnění a zároveň jej ztotožnil se světlem.

2.1 Elektromagnetické vlnění

Elektromagnetické vlnění popisuje stav elektrického a magnetického pole v rámci zkoumaného objemu. Nabitě částice na sebe působí silou, která je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti mezi nimi. Při vzájemném působení platí princip superpozice. Chceme-li zjistit sílu působící na jednu částici, sečteme silové účinky jednotlivých částic. Také platí princip reciprocity, takže jedna částice působí na všechny ostatní. Při pohybu elektricky nabitě částice vzniká proud a s ním i magnetické pole. Elektrické a magnetické pole jsou na sobě závislé a jedno je indukováno změnou druhého [Rusnak05]. Plný popis těchto polí nám poskytují Maxwellovy rovnice.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

kde \vec{D} je elektrická indukce, ρ je hustota elektrického náboje, \vec{B} je magnetická indukce, \vec{E} je intenzita elektrického pole, \vec{H} je intenzita magnetického pole, \vec{i} je elektrický proud a

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).\tag{2.2}$$

Dále zadefinujeme

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H},\end{aligned}\tag{2.3}$$

kde ϵ je elektrická permitivita prostředí a μ je magnetická permeabilita prostředí. Omezíme-li se na homogenní ($\epsilon = \text{konst.}$), izotropní (nezávislost \vec{E} a \vec{H} na směru polarizace vlny), dielektrikum bez proudů ($\vec{i} = \vec{0}, \rho = 0$) stejně jako je popsáno v [Rusnak06], pak můžeme rovnice (2.1) přepsat na tvar

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.4}$$

což je tvar shodný s rovnicemi v [Goodman05]. Ještě požadujeme, aby prostředí bylo nedisperzivní (nezávislost permitivity ϵ na vlnové délce světla λ) a nemagnetické ($\mu = \mu_0$). Tyto podmínky nejsou nijak restriktivní neboť vzduch za normálních podmínek je dobře splňuje.

Nyní se zaměříme na třetí z rovnic (2.4) jejíž obě strany zleva vektorově vynásobíme operátorem ∇ (2.2).

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right),\tag{2.5}$$

Využijeme vektorové identity

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}\tag{2.6}$$

levou stranu (2.5) nahradíme pravou stranou (2.6), kde z (2.4) vidíme, že její první člen je nulový takže dostáváme

$$-\nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right).\tag{2.7}$$

Nyní opět z (2.4) dosadíme do pravé strany (2.7) za \vec{H} přičemž využíváme zaměnitelnost parciálních derivací.

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\tag{2.8}$$

Vidíme, že prostorová změna elektrické intenzity je rovna její časové změně. Jinými slovy druhá derivace elektrického pole je shodná se zrychlením náboje. Přesunutím pravé strany (2.8) doleva a nahrazením koeficientu $\mu \epsilon$ podílem n^2/c^2 dostaneme finální podobu diferenciální rovnice

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,\tag{2.9}$$

kde n je index lomu světla a c je rychlost světla v daném prostředí. Vztah mezi indexem lomu, rychlostí světla, permitivitou a permeabilitou je

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}, c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (2.10)$$

kde ϵ_0 a μ_0 jsou hodnoty permitivity a permeability vakua.

Stejný postup můžeme opakovat pro intenzitu magnetického pole. Tato skutečnost nám ukazuje cenný poznatek. Stav elektromagnetického pole lze popsat jednou veličinou, označme si ji u , všechny ostatní jsou na ní závislé, a tak můžeme námi uvažované pole chápat jako skalární a zobecnit (2.9) na

$$\nabla^2 u - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.11)$$

2.2 Vlnová povaha světla

Chování světla je tedy popsáno rovností (2.11). Jaké je ale analytické řešení tohoto vztahu? Oproštěním se od vektorové povahy veličiny si můžeme pod hodnotou u představit například výchylku elektronu. Potom nám nic nebrání chápat rovnost jako vlnovou rovnici harmonického oscilátoru. Její řešení lze analyticky odvodit a je obecně známe. Připomeňme ještě, že hodnota v každém bodě elektromagnetického pole je závislá také na čase.

$$u(\vec{P}) = A(\vec{P}) \cos(2\pi \nu t - \Phi(\vec{P})), \quad (2.12)$$

kde A je amplituda vlnění, ν je frekvence vlnění [Hz] a Φ je fáze vlnění, je jedním z mnoha řešení vlnové rovnice. Pro úhlovou frekvenci ω platí

$$\omega = 2\pi \nu. \quad (2.13)$$

Toto řešení pomocí goniometrických funkcí je sice názorné a každý člen má jasný význam, ale dále bude potřeba sčítat několik takových členů a to je poměrně komplikované. Mnohem jednodušší je přejít do komplexní oblasti a využít Eulerovu identitu

$$e^{j\Phi} = \cos \Phi + j \sin \Phi, \quad (2.14)$$

kde j je komplexní jednotka, $j = \sqrt{-1}$, a e základ přirozeného logaritmu.

Pomocí (2.14) můžeme zapsat (2.12) jako

$$u(\vec{P}) = \left(U(\vec{P}) e^{-j2\pi \nu t} \right)_{\Re}, \quad (2.15)$$

kde \Re značí reálnou část komplexního čísla a $U(\vec{P})$ je komplexní amplituda zapsaná ve tvaru

$$U(\vec{P}) = A(\vec{P}) e^{j\Phi(\vec{P})}. \quad (2.16)$$

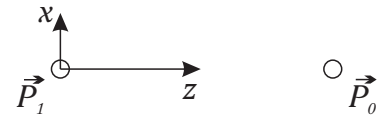
Dále v textu uvidíme, že téměř všechny stěžejní vztahy jsou v exponentu. To vyžaduje menší písmo, které se hůře čte. Nadále proto budeme používat notaci

$$e^x = \exp(x). \quad (2.17)$$

Uvažme elementární situaci. Ve volném prostoru (nekonečném vakuu) se nachází právě jeden zdroj elektromagnetického vlnění v bodě \vec{P}_1 . Komplexní amplituda jednoznačně popisuje stav v tomto bodě a čase. Když se přesuneme z bodu \vec{P}_1 do bodu \vec{P}_0 a bude nás zajímat časový průběh elektromagnetického vlnění v tomto bodě, musíme do hry zapojit Feynman-Heavisidův zákon. Tento zákon charakterizuje jak jeden nerovnoměrně se pohybující náboj působí na druhý. Obvykle je uváděn ve tvaru síly. Feynman [Feynman00] jej uvádí ve tvaru intenzity

$$\vec{E}(\vec{P}_0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_0}{r^2} + \frac{r}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}_0}{r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_0 \right), \quad (2.18)$$

kde r je vzdálenost mezi body \vec{P}_1, \vec{P}_0 ($r = \|\vec{P}_0 - \vec{P}_1\|$), \vec{r}_0 je jednotkový vektor od bodu \vec{P}_1 k \vec{P}_0 ($\vec{r}_0 = (\vec{P}_0 - \vec{P}_1)/r$) a q je náboj zdroje vlnění. Opět provedeme několik předpokladů. Zkoumaný bod \vec{P}_0 je od bodu \vec{P}_1 mnohem dál než je vlnová délka světla ($r \gg \lambda$) takže první dva členy v (2.18) jdou v limitě k nule a můžeme je zanedbat. Zavedme souřadný systém jehož počátek leží v bodě \vec{P}_1 a osa z jde směrem k bodu \vec{P}_0 , viz obrázek 2.1. Jelikož pohyb částice ve směru osy x je vzhledem ke vzdálenosti zanedbatelný, můžeme položit $r \simeq r_z$ čímž se z r stane konstanta. Změna vektoru \vec{r}_0 se také projeví pouze ve směru osy x a bude úměrná výchylce částice v bodě \vec{P}_1 . Pokud tedy $\vec{P}_1 = (0, 0, 0)^T$ a $\vec{P}_0 = (0, 0, z)^T$ přejde rovnice (2.18) na tvar



Obr. 2.1: Souřadný systém s počátkem v částici s nábojem.

$$E(\vec{P}_0) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 z} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.19)$$

což je formálně totožné s vlnovou rovnicí, jejíž řešení známe. Protože vzruch se šíří konečnou rychlostí c , musíme v bodě \vec{P}_0 počítat s výchylkou v bodě \vec{P}_1 v minulosti, jejíž doba je úměrná vzdálenosti r a platí, že $t = -r/c$. Najdeme tedy druhou derivaci (2.12)

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(\vec{P}_0) = -\frac{A(\vec{P}_1)}{r} \cos\left(2\pi\nu\left(t - \frac{r}{c}\right) - \Phi(\vec{P}_1)\right) (2\pi\nu)^2, \quad (2.20)$$

kde $A(\vec{P}_1)$ je maximální výchylka x nabitě částice v \vec{P}_1 a dosadíme do (2.19)

$$E(\vec{P}_0) = (2\pi\nu)^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{c^2} A(\vec{P}_1) \cos\left(2\pi\nu t - 2\pi\nu \frac{r}{c} - \Phi(\vec{P}_1)\right) \quad (2.21)$$

Celou rovnici (2.21) s pomocí (2.13) zapíšeme pomocí eulerovy identity ve tvaru komplexních amplitud

$$E(\vec{P}_0) = \omega^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{c^2} \exp(j\omega t) \underbrace{A(\vec{P}_1) \exp(-j\Phi(\vec{P}_1))}_{U(\vec{P}_1)} \exp\left(-j\omega \frac{r}{c}\right). \quad (2.22)$$

Pro další zpřehlednění vztahu definujeme takzvané vlnové číslo, které udává, kolik radiánů urazí vlnění na cestě o délce jednoho metru, následovně

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi f, \quad (2.23)$$

kde f je prostorová frekvence záření. Z rovnice (2.22) můžeme zadefinovat komplexní amplitudu v bodě \vec{P}_0

$$U(\vec{P}_0) = \underbrace{A(\vec{P}_1) \exp(-j\Phi(\vec{P}_1))}_{U(\vec{P}_1)} \frac{\exp(-jkr)}{r} \quad (2.24)$$

a celou rovnici 2.22 zapsat v přehlednějším tvaru

$$E(\vec{P}_0) = k^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(j\omega t) U(\vec{P}_1) \exp(-jkr). \quad (2.25)$$

Rovnice (2.25) poskytuje kompletní popis elektromagnetického pole generovaného jednou nabitou částicí, která kmitá. Zastavme čas a podívejme se na místa se stejnou intenzitou, takzvané isoplochy. Pro čas t_0 je v rovnici (2.25)

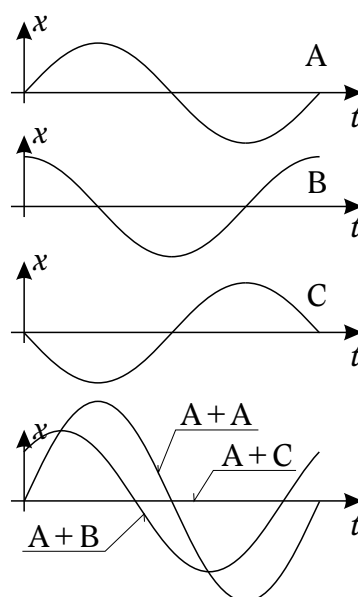
$$\frac{k^2 q}{4\pi\epsilon_0} \exp(j\omega t_0) = konst. \quad (2.26)$$

Elektrická intenzita, tak závisí pouze na r , o kterém předpokládáme, že je mnohem větší než výchylka nabitě částice od bodu \vec{P}_1 . Lze tedy říci, že $r = \|\vec{P} - \vec{P}_1\|$. Aby pro všechna \vec{P} byla intenzita konstantní, musí i r být konstantní. To jasně implikuje, že isoplochy elektromagnetického pole, generovaného jednou kmitající částicí, je kulová plocha. V případě světla a elektromagnetického vlnění tuto plochu nazýváme vlnoplocha.

2.3 Interference vlnění

Místa se stejnou intenzitou a tedy i fází mají tvar kulové plochy. Jak ale vypadá pole generované více kmitajícími částicemi? Intenzita elektrického je míra síly, kterou působí náboj v bodě \vec{P}_1 na jednotkový náboj ve zkoumaném bodě \vec{P} . Účinky jednotlivých nábojů na zkoumané místo se sčítají. Stačí tedy spočítat intenzitu elektromagnetického pole pro každý náboj zvlášť a sečíst je. Harmonický člen rovnice (2.25) napovídá, že intenzita může nabývat i záporných hodnot. To je naprosto v pořádku, protože intenzita je vektorová veličina, kterou pouze chápeme jako skalární. Znaménko zachovává orientaci síly, kterou působí pole na jednotkový náboj ve zkoumaném bodě.

Naprosto totožně jako u mechanického vlnění dojde k zesílení pokud se dvě stejně silné vlny potkají, ve svém maximu. Naopak dojde k úplnému vyrušení účinků pokud se potkají jedna vlna v minimu a druhá v maximu. Tento jev nazýváme interference vlnění. A vzájemnou polohu minim a maxim nazýváme fází. Při zesílení mluvíme o konstruktivní interferenci a říkáme, že vlny jsou ve fázi, pokud se vzájemně vyruší, jedná se o destruktivní interferenci a řekneme, že vlny jsou v protifázi. Viz obrázek 2.2.



Obr. 2.2: Součty vln v různých fázích.

Skládáme-li dvě vlny se stejnou vlnovou délkou, výsledkem je vlna se stejnou vlnovou délkou, ale jinou amplitudou a jinou fází. V této práci se omezíme na situace, kde se vyskytují vlny s jednou konkrétní vlnovou délkou a žádné jiné. Dále uváděná teorie je dostatečně obecná na to, aby bylo možné ji využít i pro případy, kde se vyskytuje vlnění různých vlnových délek. Toto zobecnění je popsáno v [Goodman05].

Tvrzení o tom, že výsledná frekvence je stejná jako frekvence sčítaných vln, lze snadno dokázat pomocí Eulerovy identity

$$A \exp(j \omega t) + B \exp(j \omega t + \Phi) = \exp(j \omega t) \cdot \underbrace{(A + B \exp(j \Phi))}_{\text{konst.}} \quad (2.27)$$

Snímače a lidský zrak reagují na intenzitu světla, přičemž potřebují dostat určitou dávku energie. Intenzita světla má stejné jednotky jako výkon. Energie je výkon dodávaný po určitou dobu. Na to, abychom získali informaci o intenzitě, tedy potřebujeme nenulovou dobu, po kterou budeme elektromagnetické pole v daném bodě zkoumat. Z tohoto předpokladu je vidět, že konkrétní výchylka nabitě částice pro nás není důležitá, protože nemůžeme učinit žádný apriorní předpoklad o době potřebné ke změření intenzity. Dodaná energie je tedy úměrná integrálu

$$W = \text{konst.} \int_{t_a}^{t_b} |\exp(j \omega t - j \Phi)| dt = \text{konst.} \cdot (b - a), \quad (2.28)$$

kde Φ je nějaká obecná fáze, která zřejmě nemá na množství energie vliv. Časový okamžik v daném bodě nehraje roli na vnímanou intenzitu výsledného vlnění. Vzájemná fáze vln, které se ve zkoumaném bodě potkávají však vliv má, a to zásadní. Z (2.24) víme, jak spočítat komplexní amplitudu pro výpočet intenzity v místě, které zkoumáme. Pro další zjednodušení budeme uvažovat, že zdroje světla jsou pouze elektrony s elementárním nábojem $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Potom stačí vyšetřovat komplexní amplitudu a zbylé vlastnosti pole jsou pouze multiplikační konstantou. Tento předpoklad nijak neomezuje obecnost stavu elektromagnetického pole, protože pokud chceme větší intenzitu, použijeme elektron s větší amplitudou. V diskrétní podobě je ještě druhá možnost, použít více elektronů.

2.4 Helmholtzova rovnost

Stav elektromagnetického pole je tedy dostatečně určen jeho amplitudou, kterou popisuje rovnice (2.24). Vztah (2.11) je parciální diferenciální rovnice, kterou lze řešit pomocí separace proměnných. Do ní dosadíme (2.15) a předpokládáme, že stav elektromagnetického pole budeme zkoumat v jednom fixním časovém okamžiku. Tak nám v rovnici s prostorovými proměnnými zůstane pouze

$$\nabla^2 U + \frac{n^2}{c^2} U = 0 \quad (2.29)$$

kde $n^2/c^2 = k$ takže dostáváme

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0. \quad (2.30)$$

Tuto rovnost nazýváme Helmholtzovou rovností.

O (2.24) víme, že řeší vlnovou rovnici, stejně tak musí vlnovou rovnici řešit i vlnoplocha s jednotkovou amplitudou a nulovou fází

$$G = \frac{\exp(jkr)}{r}. \quad (2.31)$$

Kirchhoff odvodil obecné řešení tak, že hodnotu U v bodě \vec{P}_0 vyjádřil jako součet hodnot, kterými by přispěly body na nějakém uzavřeném povrchu okolo \vec{P}_0 . Hodnoty na tomto povrchu jsou dány tak, že v bodě \vec{P}_0 je zdroj s amplitudou U a na zvoleném povrchu bychom vypočítali hodnotu, kterou bod \vec{P}_0 přispěl. Velikost r je vzdálenost integrovaného bodu od místa \vec{P}_0 .

Pro součet přes obecný povrch použijeme Greenovu větu ve speciálním tvaru

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (2.32)$$

kde $\partial/\partial n$ značí derivaci funkce ve směru normály povrchu. Pokud dosadíme

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= -U k^2 \\ \nabla^2 G &= -G k^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

do levé strany (2.32), dostáváme

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = - \iiint_V (U G k^2 - G U k^2) dv \equiv 0 \quad (2.34)$$

takže z Greenovy věty zbude pouze pravá část s tím, že G známe a jeho derivaci ve směru normály snadno určíme

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 \left(jk - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (2.35)$$

kde \vec{n} je normála funkce G pro tento případ zvolená tak, že míří směrem ke zkoumanému bodu \vec{P}_0 a má jednotkovou velikost stejně jako vektor \vec{r}_0 , který míří od zkoumaného bodu. Jsou tedy opačně orientované a skalární součin je roven -1 . Vzdálenost r je tak zároveň poloměr kulové plochy. Dosazením (2.34) a (2.31) do (2.32) dostáváme

$$U(\vec{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial n} \frac{\exp(jkr)}{r} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\exp(jkr)}{r} \right) ds \quad (2.36)$$

což je Helmholtzova a Kirchhoffova integrální věta. Ta ve spojení s (2.35) pro r jdoucí k nule jde k hodnotě $U(P_0)$, což je právě námi hledaná hodnota.

Pro podrobnější odvození této věty je v knize [Goodman05] věnována celá kapitola 3.3.

2.5 Kirchhoffovo řešení

Gustav Kirchhoff se zabýval tím, jak se světlo šíří za překážkou. Uvažoval, že světlu v cestě stojí neprůsvitná překážka a v ní je malý otvor, clona, a chtěl vědět jak vypadá elektromagnetické pole za touto překážkou. Aby se oprostil od dění před clonou, využil Huygensův princip¹ šíření

¹ O Huygensově principu se zmíníme dále v textu.

světla. Jako integrační povrch zvolil z části rovinu překážky s clonou a z části kulovou plochu, kterou uzavřel prostor kolem zkoumaného bodu. Viz obrázek 2.3.

Integrál (2.36) lze rozdělit na integrály přes plochu S_1 a S_2 . Pokud $\partial G/\partial n$ pro velké poloměry kulové plochy nahradíme jednodušším výrazem $\partial G/\partial n \approx jkG$, lze snadno ukázat, že příspěvky této plochy jsou nulové. Je to snadno zdůvodnitelné, protože pokud zdroj světla je před clonou pak do bodu \vec{P}_0 nemůže přicházet z jiného směru než od clony.

Dále Kirchhoff ukázal, že není potřeba integrovat přes celou nekonečnou rovinu překážky s clonou, ale pouze přes plochu clony Σ . Integrál lze ještě zjednodušit, když uvážíme, že body ve kterých chceme vypočítat hodnoty elektrického pole jsou od clony vzdáleny mnoho vlnových délek. Potom totiž derivace (2.35) může mít jednodušší tvar, protože obecně bude platit $k \gg 1/r$.

$$\frac{\partial G}{\partial n} = jk (\vec{n} \cdot \vec{r}_0) \frac{\exp(jk r_0)}{r}. \quad (2.37)$$

Dosazením (2.37) do (2.36) dostáváme

$$U(\vec{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(jkr)}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - jkU (\vec{n} \cdot \vec{r}_0) \right) ds \quad (2.38)$$

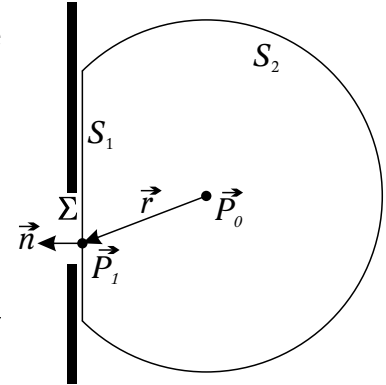
2.6 Raileigh-Sommerfeldovo řešení

Kirchhoffovo řešení sice poskytuje velice přesné výsledky, ale zároveň má nepříjemnou vlastnost v podobě okrajových podmínek, které definují oblast clony Σ a to jak pro samotné komplexní amplitudy, tak pro jejich derivace ve směru normály. S řešením přišel Arnold Sommerfeld. Jako funkci G pro greenovu větu neuvažoval pouze kulovou vlnoplochu vycházející z bodu \vec{P}_1 , ale použil dvě kulové vlnoplochy s opačnou fází, z nichž jedna vychází ze zkoumaného bodu \vec{P}_0 a druhá z jeho symetrického obrazu $\vec{\tilde{P}}_0$ podle roviny clony. Viz obrázek 2.4. Díky tomu, že se na cloně potkají v protifázi, jejich účinky se vyruší a nijak neovlivní dění v prostoru clony Σ .

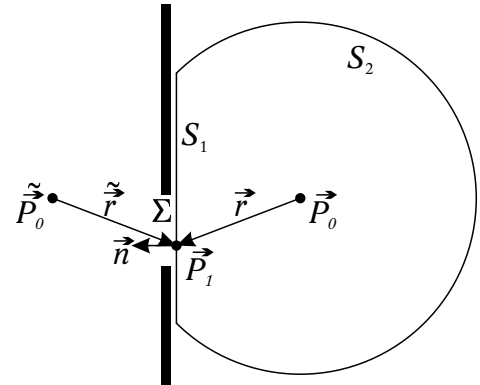
$$G_- = \frac{\exp(jkr)}{r} - \frac{\exp(jk\tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (2.39)$$

Zároveň našel i druhé řešení, které také používá dvě kulové vlnoplochy v bodech \vec{P}_0 a $\vec{\tilde{P}}_0$, které jsou ve fázi a tak přispějí konstantou přes celou plochu clony. V [Goodman05] je tato funkce označena jako G_+

$$G_+ = \frac{\exp(jkr)}{r} + \frac{\exp(jk\tilde{r})}{\tilde{r}}. \quad (2.40)$$



Obr. 2.3: Obalový povrch zkoumaného bodu jak jej navrhnul Gustav Kirchhoff. Převzato z [Goodman05]



Obr. 2.4: Integrační povrch a zkoumané body pro řešení podle Rayleigha a Sommerfelda.

Pro derivace podle normály clony platí stejné vztahy a předpoklady ($r \gg \lambda$) jako pro Kirchhoffovo řešení, takže můžeme rovnou uvést dobrou aproximaci

$$\frac{\partial G_-}{\partial n} \simeq 2jk(\vec{n} \cdot \vec{r}_0) \frac{\exp(jkr)}{r}. \quad (2.41)$$

Pro výpočet komplexní amplitudy v bodě \vec{P}_0 použijeme Helmholtzovu-Kirchhoffovu integrální větu

$$U(\vec{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.42)$$

kam za G dosadíme G_- z (2.39) a (2.41), čímž dostaneme první řešení podle Rayleigh-Sommerfelda

$$U_1(\vec{P}_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\vec{n} \cdot \vec{r}_0) \frac{\exp(jkr)}{r} ds. \quad (2.43)$$

Jeho druhé řešení získáme, když do (2.42) dosadíme (2.40)

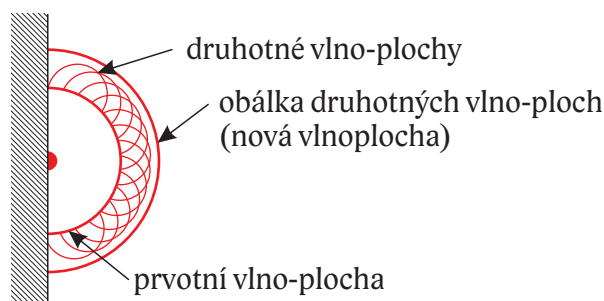
$$U_{II}(\vec{P}_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\exp(jkr)}{r} ds \quad (2.44)$$

a vidíme, že sice nemusíme počítat skalární součin vektoru průvodiče a normály, ale pracujeme s derivací komplexní amplitudy ve směru normály, což není pro naše další potřeby praktické.

Když si vezmeme obě řešení Rayleigha a Sommerfelda a srovnáme je s Kirchhoffovým řešením, tak uvidíme, že Kirchhoffovo řešení je aritmetickým průměrem těchto řešení. Což nedokazuje nic jiného než, že řešení jsou ekvivalentní.

2.7 Huygensův princip

V 17. století popsal Christiaan Huygens šíření světla jako šíření vln na rybníce. Základním kamenem jeho teorie byl předpoklad, že pokud světlo dorazí do určitého bodu, tak se z tohoto bodu stává nový zdroj světla, ze kterého vychází úplně nová kulová vlnoplocha. Když tato vlnoplocha urazí libovolnou vzdálenost, stane se z jejího povrchu množina bodových zdrojů světla z nichž opět vyjdou vlnoplochy. Jejich počet není omezen a tak jejich obálka je perfektní kulová plocha, takže teorie nijak nekoliduje s principy popsány dříve.



Obr. 2.5: Huygensův princip šíření světla.

Tento přístup se při Fresnelově prezentaci snažil zpochybnit francouzský matematik Siméon-Denis Poisson, když matematicky ukázal, že za kruhovou překážkou je v místě geometrické-

ho stínu bod, kde je světlo. Což by znamenalo neplatnost Huygensovy teorie jakožto i teorie zde prezentované. Naštěstí se při experimentálním měření ukázalo, že takový bod skutečně existuje a tak není třeba se znepokojovat. Jeho existence však není apriorní. Na to, aby ve zmíněném místě došlo ke konstruktivní interferenci, která by způsobila přítomnost světlého bodu v ose disku, muselo by světlo na obvodu celého disku být ve fázi.

Do 60. let 20. století bylo takové světlo pouze teoretickou záležitostí. Až s vynálezem laseru bylo možné vytvořit perfektně koherentní světlo, kterým se posvítilo na kruhovou překážku ve směru její osy a za ní vzniknul světlý bod, sice výrazně slabší než samotné světlo, ale přeci. Všechny ostatní zdroje světla, i monochromatického, vyzařují světlo s náhodnou fází, kolísavou frekvencí a širším spektrem vlnových délek, takže v součtu příspěvků po obvodu kruhu dojde k vyrušení účinků, protože náhodně posunuté sinusoidy budou mít povahu šumu a jak známo, šum má nulovou střední hodnotu [Smith97].

Pro holografii je Huygensův princip stěžejní. Vezměme si dva bodové zdroje světla a jejich vlnoplochy pro nějakou fixní fázi. Tato situace je zobrazena na obrázku 2.6. Tam, kde se kružnice (v prostoru kulové plochy) protínají, se potkávají vlnoplochy obou zdrojů ve fázi a dojde ke konstruktivní interferenci. V jiných místech samozřejmě dochází k destruktivní interferenci. Kromě snadno ověřitelné interference, která potvrzuje existenci světlého bodu za Poissonovým diskem, v ose dvou zdrojů světla, jsou zde ještě další směry, ve kterých bude docházet k interferenci. Jejich směr a počet závisí na vzájemné vzdálenosti bodových zdrojů světla a jejich fázi. Čím dále od sebe budou, tím více směrů s konstruktivní interferencí vznikne.

Jejich směr lze vypočítat na základě vzdálenosti bodových zdrojů světla následovně

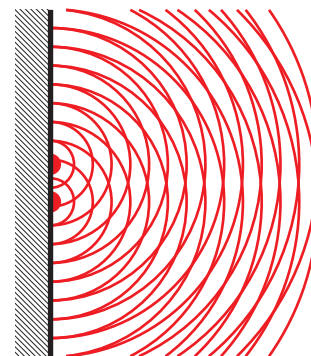
$$\Delta x \sin \vartheta = n \lambda, \quad (2.45)$$

kde Δx je vzdálenost světelných zdrojů, n je celé číslo, λ vlnová délka světla a ϑ je úhel mezi osou roviny bodových zdrojů a směrem interferenčního maxima. Pro situaci na obrázku 2.6 máme $\Delta x = 2\lambda$ takže máme $2\sin \vartheta = n$ a tomu odpovídá $\vartheta = 0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 30^\circ$. Podrobnější odvození lze nalézt v [Rusnak07].

Pokud víme, jak se světlo šíří prostorem, můžeme rozmístit bodové zdroje různé intenzity a fáze tak, aby v požadovaném místě prostoru došlo k interferenci tří, čtyř či více vlnoploch a vzniknul tak nový bodový zdroj požadované intenzity. Tento nově vzniklý bodový zdroj je cílem našeho modelování v holografii. Když jich poskládáme dostatečné množství, vytvoříme tak objekt, který se bude jevit jako skutečný objekt osvětlený světlem. Množina bodových zdrojů generujících tyto virtuální bodové zdroje se nazývá optické pole.

2.8 Optické pole

Prozatím jej uvažujme spojitě a dvourozměrné. Jedná se o jakýsi řez prostorem elektromagnetického vlnění. V každém bodě tohoto řezu zaznamenáme amplitudu a fázi elektromagnetického vlnění. Když zrekonstruujeme toto pole ve volném prostoru uvidíme přesně to co bylo vidět ve chvíli, kdy se pole zaznamenalo.



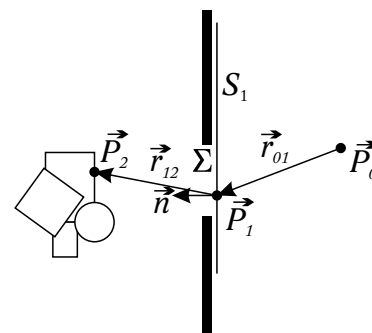
Obr. 2.6: Dva bodové zdroje světla a vlnoplochy stejné fáze.



Obr. 2.7: Plná vizualizace obr. 2.6.

Když víme, jak spočítat stav elektromagnetického pole za clonou, stačí se zamyslet, že body osvětleného objektu před clonou (\vec{P}_2) jsou podle Huygensova principu také bodové zdroje světla a tudíž z nich vyházejí vlnoplochy, které přispějí do všech bodů roviny clony Σ .

$$U(\vec{P}_1) = U(\vec{P}_2) \frac{\exp(jkr_{12})}{r_{12}}. \quad (2.46)$$



Obr. 2.8: Definice optického pole.

Potom stav světla za clonou pro jeden bod objektu před ní lze popsat pomocí difrakčního vzorce Rayleigh-Sommerfelda

$$U_1(\vec{P}_0) = \frac{1}{j\lambda} U(\vec{P}_2) \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{r}_0) \frac{\exp(jk(r_{01} + r_{12}))}{r_{01} r_{12}} ds. \quad (2.47)$$

Kdybychom chtěli vědět, jak vypadá stav v bodu \vec{P}_0 pro všechny body objektu před clonou, stačí sečíst dílčí příspěvky těchto bodů do bodu \vec{P}_1 takže $U(\vec{P}_1)$ lze také vyjádřit jako integrál

$$U(\vec{P}_1) = \frac{1}{j\lambda} \iint_S U \cdot \left(\vec{n} \cdot \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \right) \right) \frac{\exp(jkr_{12})}{r_{12}} ds, \quad (2.48)$$

kde \vec{n} je normála povrchu objektu před clonou a S je povrch tělesa. Ihned vidíme, že (2.48) je formálně totožná s (2.43), takže pokud rekonstruujeme takové světelné pole jako vytvoří objekt v prostoru clony Σ uvidíme objekt, kterým bylo toto pole vytvořeno.

2.9 Úhlové spektrum

Uvažme, že kulová vlnoplocha se šíří neomezeně prostorem a její poloměr tak roste nad všechny meze. V nekonečné vzdálenosti od zdroje je pak konečný element kulové plochy rovinný. Například světlo dopadající ze slunce na zemi lze považovat za rovinnou vlnoplochu. Práce s rovinou vlnou je mnohem jednodušší. Její matematický popis je

$$U(\vec{P}) = U_0 \exp(\vec{k} \cdot \vec{P}), \quad (2.49)$$

kde U_0 je komplexní amplituda patřící této vlně a \vec{k} je směrový vektor kolmý na vlnoplochy o velikosti $k = 2\pi/\lambda$. Protože je vlna rovinná, neklesá její intenzita se vzdáleností od zdroje. Má tedy v celém prostoru konstantní amplitudu, zjištění, jak vypadá vlna v daném bodě, je tak pouze otázkou zjištění jejího fázového posunu.

Například pokud taková vlnoplocha dopadá na clonu Σ , lze její vliv na celou plochu clony vyjádřit lineárním vztahem (2.49). Když pro přehlednost umístíme clonu do počátku souřadného systému tak, že její normála bude rovnoběžná s osou z , a fázi rovinné vlnoplochy také vztáhneme k počátku, pak stačí pracovat pouze s kolmým průmětem vektoru \vec{k} do roviny clony

$$U(x, y) = U_0 \exp(jk_x x + jk_y y). \quad (2.50)$$

Stejně jako jsme popsali hodnoty světelného pole v sekci 2.8 pomocí součtu všech dopadajících vlnoploch, provedeme i zde vyjádření hodnot světelného pole pomocí součtu dílčích vlnoploch dopadajících ze všech možných směrů

$$U(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} A(\vartheta, \varphi) \exp(jk \cos \vartheta \sin \varphi x + jk \sin \vartheta \sin \varphi y) d\varphi d\vartheta, \quad (2.51)$$

kde ϑ je azimut vektoru \vec{k} vzhledem k ose x v rovině xy , φ je elevace vektoru \vec{k} od osy z a $A(\vartheta, \varphi)$ je komplexní amplituda vlny přicházející ve směru určeném úhly ϑ a φ . Množinu hodnot $A(\vartheta, \varphi)$ pro všechny úhly nazýváme úhlové spektrum.

Pomocí vhodného fázového posunu a amplitudy je možné v rovině clony vytvořit libovolné světelné pole. Získáním těchto fází a amplitud se zabýval Joseph Fourier, když v 19. století zkoumal šíření tepla a snažil se rozložit funkci na lineární kombinaci básových funkcí, v jeho případě sinus a cosinus. Fourierova analýza je natolik obecná, že jí lze použít i ve více dimenzích.

Výraz (2.51) má dvě nezávislé proměnné, takže je možné přejít k integrálu v kartézských souřadnicích, který je opět jednodušší na počítání. Zde je potřeba udělat drobnou abstraktní úvahu o geometrii rovinné vlnoplochy. Celou dobu se věnujeme záření o jedné konstantní frekvenci jak z důvodu přehlednějších vzorců, tak z důvodu, že k dispozici jiné světlo prostě nemáme. Veškeré dostupné zdroje koherentního světla jsou monochromatické.

Pro potřeby vyjádření (2.51) jakožto dvojnásobného integrálu v rovině zavedeme vlny s nižším vlnovým číslem než k . Ty samozřejmě nemají svůj významový protějšek v oblasti viditelného spektra elektromagnetického záření. Směrový vektor vlnoplochy lze v kartézských souřadnicích zapsat jako

$$\vec{k} = 2\pi(f_x, f_y, f_z)^T, \quad (2.52)$$

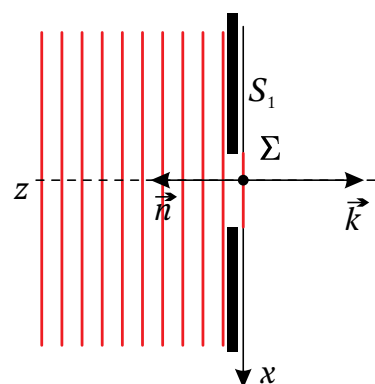
přičemž f_x značí prostorovou frekvenci [m^{-1}] ve směru osy x a další analogicky. Názorně to ukazuje obrázek (2.9), kde na rovinu clony Σ dopadá rovinná vlnoplocha se směrovým vektorem $\vec{k} = (0, 0, 2\pi/\lambda)^T$ potom z (2.50) zbudě pouze komplexní amplituda. Naproti tomu obrázek 2.10 má vektor \vec{k} v obecné poloze $\vec{k} = 2\pi(f_x, 0, f_z)^T$ takže na cloně se objeví amplituda U_0 jejíž fáze se lineárně mění se souřadnicí x

$$U(x, y) = U_0 \exp(jk_x x). \quad (2.53)$$

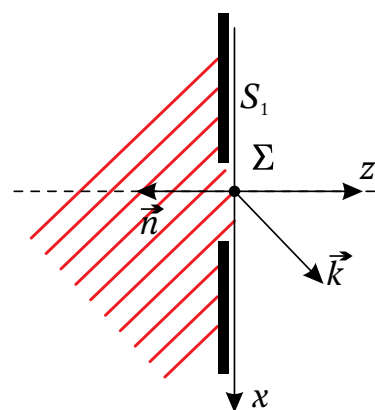
Uvědomme si, že musí platit $\|\vec{k}\| = k = 2\pi/\lambda$ a proto prostorové frekvence mohou nabývat hodnot z intervalu $\langle 0, 1/\lambda \rangle$ a zároveň musí splňovat podmínku

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} = 1/\lambda. \quad (2.54)$$

Optické pole v prostoru clony Σ popíšeme pomocí syntézy rovinných vln daných vektorem prostorových frekvencí v kartézské soustavě.



Obr. 2.9: Rovinná vlnoplocha dopadající na clonu kolmo.



Obr. 2.10: Rovinná vlnoplocha dopadající šikmo na clonu.

$$U(x, y) = \iint A(f_x, f_y) \exp(j 2 \pi (x f_x + y f_y)) d f_x d f_y, \quad (2.55)$$

kde $A(f_x, f_y)$ je komplexní amplituda pro vlnoplochu ve směru určeném její frekvencí. Třetí složku můžeme snadno dopočítat z podmínky (2.54) jako

$$f_z = \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}. \quad (2.56)$$

Jestliže vztah (2.55) je integrál v kartézských souřadnicích a my budeme chtít využít maximální prostorovou frekvenci, zjistíme, že v rozích čtverce, přes který integrujeme, nebudou hodnoty f_x a f_y splňovat podmínku (2.54). Hodnota f_z by byla komplexní a při následné propagaci by se objevovala evanescentní vlna, která však velice rychle zmizí a není tak pro vzdálenosti, ve kterých optické pole zkoumáme, podstatná. Úhlové spektrum pro frekvence nesplňující podmínku (2.54) bereme jako nulové. Vztah (2.55) je formálně shodný se zpětnou Fourierovou transformací.

Úhlové spektrum pro dané pole získáme dopřednou Fourierovou transformací. Její vlastnosti probereme dále v kapitole věnované vztahu numerického a analytického řešení. Prozatím uvedme vztah, jakým získáme úhlové spektrum

$$A(f_x, f_y) = \iint U(x, y) \exp(-j 2 \pi (x f_x + y f_y)) d x d y \quad (2.57)$$

Nyní můžeme každé hodnotě $A(f_x, f_y)$ přiřadit pomocí (2.56) vynásobením 2π směrový vektor. Vzorci (2.57) a (2.51) jsou ekvivalentní a vztah mezi nimi zajišťuje jakobián sférických souřadnic.

2.9.1 Propagace úhlového spektra

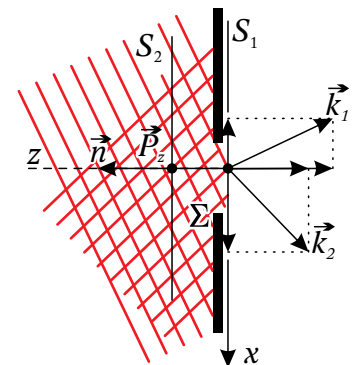
Když se rovinné vlnoplochy protínají v prostoru clony, musí se protínat i v jiných místech, například před clonou na rovině S_2 , rovnoběžné s rovinou S_1 . Viz obrázek 2.11. Je zřejmé, že na rovině S_2 se mění jejich fázový posun v závislosti na její vzdálenosti od počátku. Spočítáme, kolik radiánů musí urazit vlnoplocha z počátku, aby dosáhla průsečíku (\vec{P}_z) roviny S_2 s přímkou ve směru \vec{k}_z , procházející počátkem, neboli s optickou osou. Zde uplatníme výše vyřčenou abstrakci o vlnách s nižší prostorovou frekvencí. Složka z , vzdálenosti průsečíku \vec{P}_z , je vzdálenost rovin $|S_1 S_2|$, takže je známá bez dalších výpočtů. Kolik urazí vlna \vec{k}_z radiánů než dosáhne roviny S_2 je

$$\Phi = z k_z. \quad (2.58)$$

pokud se na komplexní amplitudy odkazujeme pomocí prostorových frekvencí jako v rovnici (2.55), lze hodnotu k_z z rovnice (2.58) vyjádřit pomocí (2.56) jako

$$k_z = 2 \pi f_z = 2 \pi \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}. \quad (2.59)$$

Ihned vidíme, že uražená vzdálenost závisí pouze na vzdálenosti rovin a složce k_z . Z (2.59) a (2.58) snadno určíme novou komplexní amplitudu vlny v rovině S_2



Obr. 2.11: Vlnoplochy na povrchu S_2 .

$$A(f_x, f_y, z) = A(f_x, f_y, 0) \exp(-j 2 \pi z \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}). \quad (2.60)$$

Vztah (2.60) je jedním ze stěžejních poznatků v šíření světla. Pokud je předloha rovinný obraz, je možné jej pomocí Fourierovy analýzy dekomponovat na rovinné vlnoplochy, přepočítat jejich komplexní amplitudy pro požadovaný posun a rekonstruovat optické pole pomocí Fourierovy syntézy. Pomocí (2.60) máme popsanou translaci ve směru normály, která je bijekcí. Lze tedy rovinu posunout i zpět. Rovinný objekt musí být tvořen součtem účinků bodových zdrojů umístěných v nekonečnu, protože ty vytváří rovinné vlnoplochy, které předpokládáme v celém prostoru.

2.9.2 Rotace úhlovým spektrem

Vlnoplochy dekomponovaného optického pole jsou určeny vektorem konstantní velikosti a komplexní amplitudou. Rotace vektorem způsobí rotaci vlnoplochy přičemž její komplexní amplituda zůstane zachována. Po rekonstrukci světelného pole se obraz objeví na rovině, jejíž vztah k původní rovině je dán právě rotační maticí, kterou byly transformovány vektory vlnoploch.

Stejně jako jsme v předchozí sekci zkoumali, jak vypadá světelné pole v určité vzdálenosti od původní roviny, můžeme i zde spočítat, jak bude světelné pole vypadat v rovině S_2 , když je generováno rovinou S_1 . V tomto případě přesuneme komplexní amplitudy na jiné vektory \vec{k} a z nich rekonstruujeme rovinu S_2 .

Vezměme například situaci na obrázku 2.12. Optické pole se skládá pro jednoduchost ze dvou rovinných vlnoploch, které popisují optické pole na rovině S_1 . Nás zajímá, jak bude vypadat optické pole v rovině S_2 . Roviny jsou dány normálovým vektorem a prochází počátkem souřadné soustavy. Poloha S_2 vzhledem k S_1 je určena rotační maticí \mathbf{R} následovně

$$\vec{n}_2 = \mathbf{R} \vec{n}_1, \quad (2.61)$$

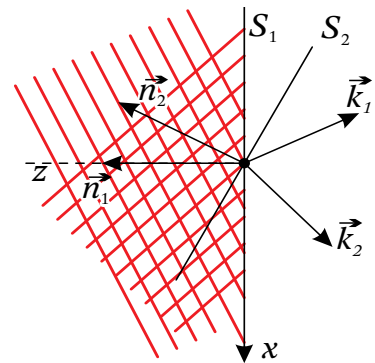
kde \vec{n}_1 a \vec{n}_2 jsou normálové vektory rovin a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je ortonormální matice. Podobným vztahem jsou propojeny i vektory \vec{k} k rovině S_2

$$\vec{\tilde{k}} = \mathbf{R}^T \vec{k}, \quad (2.62)$$

kde \sim označuje příslušnost vektoru do prostoru roviny S_2 . Chceme-li znát optické pole v prostoru roviny S_2 , pak každé komplexní amplitudě přiřadíme nový směrový vektor podle rovnice (2.62), nebo, jak bude uvedeno dále, každému směrovému vektoru v prostoru S_2 přiřadíme komplexní amplitudu, která náleží vektoru v prostoru S_1 podle (2.61).

$$A(\vec{\tilde{k}}) = A(\mathbf{R} \vec{k}) \quad (2.63)$$

Tuto transformaci nazýváme rotací úhlového spektra a popisuje stav optického pole v jiné rovině v závislosti na hodnotách v rovině původní a na rotační matici. Spolu s propagací, ekvivalentem translace, dané vztahem (2.60), máme transformační aparát pro analýzu optického pole v libovolné rovině.



Obr. 2.12: Rotace úhlovým spektrem.

V tomto místě se může zdát, že zkoumání optického pole pomocí dekompozice na rovinné vlnoplochy je příliš komplikované v porovnání s Rayleigh-Sommerfeldovým řešením popsaným v kapitole 2.6 rovnicí (2.43). V kapitole věnované numerickému řešení bude patrné, že práce s úhlovým spektrem má menší výpočetní složitost než Rayleigh-Sommerfeldovo řešení, implementované jako konvoluce pomocí rychlé Fourierovy transformace.

2.10 Fotometrie

Doposud jsme pro jednoduchost uvažovali, že zdrojem světla jsou body na povrchu objektu, ale nezbývali jsme se tím, jakou má takový zdroj intenzitu. Abychom dokázali určit intenzitu osvětlení povrchu, musíme prozkoumat, jak se intenzita mění se vzdáleností od zdroje. Je sice pravda, že přesně tuto otázku řeší celá první kapitola, ale používat takto složitý aparát je v tomto případě úplně zbytečné. Kdybychom uvažili veškeré odrazy světla ve scéně, tak výpočet osvětlení objektu bude mnohonásobně náročnější než samotný výpočet optického pole.

Chceme-li být precizní můžeme, udělat energetický uzávěr scény a použít geometrický výpočet radiosity. I to je v některých případech zbytečně složité a tak si vystačíme s ještě jednodušším modelem osvětlení, který řeší pouze vzájemnou polohu zdroje světla a elementární plošky, na kterou dopadá. Jako parametry zde vystupují svítivost zdroje, jeho prostorová charakteristika, velikost elementární plošky a směr její normály vzhledem k vektoru jdoucímu od plošky ke zdroji světla.

Fotometrie se zabývá touto částí záření, kterou lidské oko vnímá jako světlo. Základní charakteristikou světelného zdroje je jeho *svítivost* (I) nebo též *intenzita*. Jednotkou je kandela ([cd], z anglického candle – svíčka), která říká jaký výkon daný zdroj vyzáří ve zkoumaném směru do prostorového úhlu o velikosti 1 steradián. Jde tedy o míru výkonu pro daný směr. Každá vlnová délka má jiný zářivý výkon. Například pro světlo s vlnovou délkou 555 nm je $1 \text{ [cd]} = 1/683 \text{ [W/sr]}$.

Pokud chceme znát celkový světelný výkon zdroje, označovaný jako *světelný tok* F [lm], musíme integrovat jeho intenzitu přes celou kulovou plochu jednotkového poloměru, která jej obklopuje

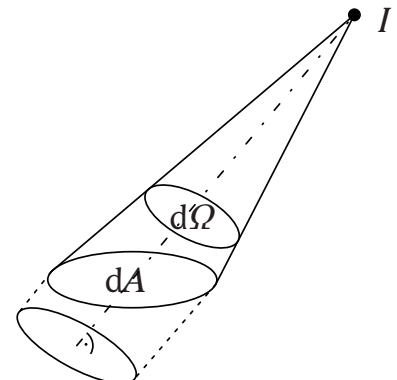
$$F = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\varphi, \vartheta) d\varphi d\vartheta, \quad (2.64)$$

kde ϑ je úhel mezi osou x a průvodičem povrchu kulové plochy, φ je úhel mezi osou y a průvodičem a $I(\varphi, \vartheta)$ je intenzita zdroje ve směru určeném vektorem $(\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi)^T$. Pokud je zdroj isotropní, tj. jeho intenzita je stejná ve všech směrech, je světelný tok od zdroje vyjádřen jako součin jeho intenzity a prostorového úhlu koule

$$F = 4\pi I. \quad (2.65)$$

Bodový zdroj osvětluje elementární plošku objektu, která zabírá určitý elementární prostorový úhel ($d\Omega$) vzhledem k bodovému zdroji světla a dopadne na ní $I d\Omega$ lumenů. Pro dříve uvedené výpočty vlnové optiky používáme jako výchozí element bod. Přijatý výkon, (dF) elementární plošky (dA) tedy vydělíme prostorovým úhlem ($d\Omega$), který zabírá vzhledem ke zdroji, a také plochou jejího kolmého průmětu ve směru dopadajícího světla.

$$L = \frac{dF/d\Omega}{\cos \delta dA} \quad (2.66)$$



Obr. 2.13: Geometrický význam jasu.

kde δ je úhel mezi normálou plošky a spojnici od této plošky ke zdroji světla. Dostaneme tak jas $[cd/m^2]$, což je plošná míra intenzity. Viz obrázek 2.13. Ten nám umožní použití v integrálech, kde přenásobením velikostí elementu plochy získáme opět intenzitu. Poměrně přehledný úvod do fotometrie poskytují [Nave97] a [LED95].

Při pohledu na vzorec (2.66) je jasné, že pokud bude světlo dopadat rovnoběžně, bude úhel δ roven $\pi/2$ a kosinus půjde k nule, čímž celý výraz bude divergovat. Stejně tak půjde k nule element prostorového úhlu. Matsushima zavádí ve svém článku [Matsushima05] namísto $1/\cos(\delta)$ člen

$$\frac{1+\gamma}{\cos \delta + \gamma}, \quad (2.67)$$

kde γ je korekční konstanta, která je závislá na materiálu a pohybuje se od 0 do 1.

Zkoumání šíření světla z roviny na rovinu už napovědělo, že základním stavebním kamenem objektů, které budeme vykreslovat, budou rovinné plošky. Zapišeme tedy světelný tok z povrchu plošky jako

$$F = \sigma a^2 A, \quad (2.68)$$

kde σ je prostorová frekvence vzorkování povrchu, a^2 je druhá mocnina amplitudy, neboli intenzita a A je velikost povrchu plošky. Pro další zjednodušení budeme tyto plošky osvětlovat rovnoběžným světlem. To znamená, že v každém bodě prostoru bude mít světlo stejný směr a stejnou intenzitu. Prostorový úhel pod, kterým je ploška osvětlená, již není důležitý. Jas dané plošky je tak závislý pouze na úhlu pod, kterým je osvětlován podle Lambertova zákona

$$L = L_0 (\cos \delta + l_e), \quad (2.69)$$

kde L_0 je jas plošky při kolmém osvětlení a nulovém ambientním osvětlení l_e . Více o použitém matematickém osvětlovacím modelu popisuje Phong ve svém článku [Phong75].

Kvůli omezením, která budou podrobně rozebrána v části věnované numerickému řešení, jsou plošky upraveny tak, aby směřovaly veškeré světlo na rovinu hologramu. To by způsobovalo, že by vzájemný jas více plošek nebyl takový jako ve skutečnosti být má. Je proto potřeba vážít tento jas vzájemnou polohou normály plošky a normály hologramu. Použijeme znovu vzorcek (2.66) s kompenzací (2.67)

$$L = \frac{dF/d\Omega(1+\gamma)}{(\cos \delta_v + \gamma) dA} \quad (2.70)$$

kde δ_v je úhel mezi normálou plošky a normálou hologramu. Diferenciální podoba (2.68) je $dF = \sigma a^2 dA$ a světlo z objektu se díky difuzi rozptýluje v úhlu Ψ . Vytvoří tak prostorový úhel $d\Omega = \pi \tan^2 \Psi$, čímž (2.70) přejde na tvar

$$L = \frac{\sigma a^2 (1+\gamma)}{\pi \tan^2 \Psi (\cos \delta_v + \gamma)}.$$

Za L dosadíme z (2.69) a vyjádříme amplitudu a

$$a = \sqrt{\frac{L_0 (\cos \delta + l_e) \pi \tan^2 \Psi (\cos \delta_v + \gamma)}{\sigma (1+\gamma)}}. \quad (2.71)$$

3 Holografie

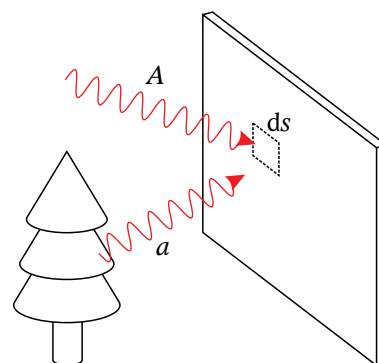
Je to poměrně mladá vědní disciplína. Její základ položil v roce 1947 maďarský fyzik Dennis Gabor, když publikoval článek o využití koherentního paprsku a fotografického materiálu ke zkoumání nehomogenit v průhledném prostředí. Na první realizaci jeho experimentu si musel počkat až do 60. let 20. století, kdy byl vyroben první laser. Jak sám píše ve svém životopise [Gabor71], byla holografie vedlejším produktem ve snaze vylepšit vlastnosti elektronového mikroskopu. Na uplatnění jeho poznatků v elektronové mikroskopii si musel ještě dalších deset let počkat. V roce 1971 získal Nobelovu cenu za fyziku.

Princip jeho experimentu spočíval v prosvícení dobře průhledného prostředí paprskem koherentního monochromatického světla a jeho zachycení na fotografickém materiálu. Drobné nehomogenity v prosvěcovaném prostředí změni charakteristiku světla, které jimi projde. Jelikož už víme, že světlo má kromě intenzity i určitou fázi, můžeme využít interference vlnění k zobrazení i jinak nepatrných změn. Ostatně prvotním Gaborovým záměrem bylo zkoumání atomových mřížek v látce. Velice rychle se ukázalo, že Gaborův princip lze zobecnit i pro světlo odražené od objektů.

3.1 Záznam hologramu

Hologram je záznam optického pole, takže musí nést jak informaci o intenzitě, tak informaci o fázi. V sekci 2.3 jsme zmínili, že současné snímáče, jakožto i lidský zrak, reagují na množství dodané energie a fázi ignorují. Pokud není možné zachytit fázi, musíme se pokusit najít vhodnou transformační funkci, která sloučí hodnoty fáze a amplitudy do hodnoty intenzity. Stačí si uvědomit jak fázový posuv dvou vln ovlivní výslednou amplitudu.

Ke světlu odraženému z objektu přidáme ještě referenční světlo, které je „čisté,“ neboli jeho vlnoplochy jsou buďto přesně kulové, nebo rovinné. Toto světlo interferuje se světlem odraženým od objektu a díky různým fázím dojde k různým interferencím. Protože referenční světlo dokážeme znovu snadno reprodukovat, víme s čím světlo odražené z objektu interferovalo a můžeme jej pomyslně odečíst. V případě, že by veškeré světlo mělo jednotnou amplitudu, byli bychom schopni získat přesné hodnoty optického pole. Obecně se amplituda odrazem mění a musíme jí uvažovat. Z toho vyplývá, že odečtením referenční vlny získáme světlo, které se s referenční vlnou potkalo na snímáči ve fázi a tak způsobilo zesílení, nebo se s referenční vlnou potkalo poblíž fáze, ale mělo o něco větší amplitudu takže výsledná amplituda byla stejná.



Obr. 3.1: Záznam hologramu

Stejně jako na obrázku 3.1 se zaměříme pouze na elementární část snímáče jehož rozměry odpovídají jedné buňce, v ideálním případě $\lambda/2 \times \lambda/2$. Na tu dopadá světlo z objektu s komplexní amplitudou a a světlo referenční (A). Intenzita světla na elementární plošce ds je

$$I = |a + A|^2. \quad (3.1)$$

Což po rozepsání dává

$$I = \left(\sqrt{(a_{\Re} + A_{\Re})^2 + (a_{\Im} + A_{\Im})^2} \right)^2 = (a_{\Re} + A_{\Re})^2 + (a_{\Im} + A_{\Im})^2, \quad (3.2)$$

kde \Re označuje reálnou složku komplexního čísla a \Im imaginární. Celý výraz můžeme rozepsat do tvaru, jehož členy mají význam světelných dopadajících na plošku ds .

$$I = |a|^2 + |A|^2 + 2(a_{\Re} A_{\Re} + a_{\Im} A_{\Im}). \quad (3.3)$$

První člen je intenzita světla odraženého z objektu, druhý člen je amplituda referenční vlny a poslední člen lze vyjádřit jako

$$2(a_{\Re} A_{\Re} + a_{\Im} A_{\Im}) = 2|a| \cdot |A| \cos(\delta). \quad (3.4)$$

Výraz (3.4) má význam intenzity interference objektové a referenční vlny. Zároveň vidíme, že se jedná o výraz, který udává hodnotu skalárního součinu $(a_{\Re}, a_{\Im}) \cdot (A_{\Re}, A_{\Im})$, takže δ je rozdíl fází komplexních hodnot a a A

$$\delta = \Psi - \Phi, \quad (3.5)$$

přičemž Ψ je fáze referenční vlny, kterou známe a dokážeme rekonstruovat.

3.2 Rekonstrukce hologramu

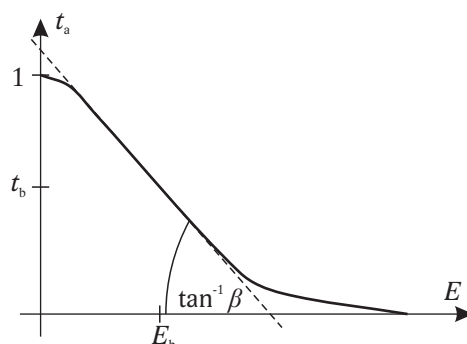
Pokud zaznamenáváme hologram fotografickou cestou, získáme film s emulzí, která ztmavla úměrně intenzitě popsané vztahem (3.3) a době osvitu. Jelikož doba osvitu je závislá na daném materiálu a požadavku, že chceme využít tu část expoziční křivky, která je maximálně rovná, můžeme dobu osvitu považovat za konstantu a zabývat se pouze intenzitou. Míra propustnosti fotografického materiálu je přímo úměrná expozici a vyjadřuje poměr světla na film dopadajícího a světla propuštěného:

$$\tau = \frac{I_t}{I_i}, \quad (3.6)$$

kde I_t je intenzita propuštěná materiálem a I_i je intenzita světla dopadajícího. Propustnost získaná expozicí slouží k modulaci světla. Gradační křivka fotomateriálu je na určitém úseku téměř lineární, pokud propustnost vyjádříme jako poměr amplitud

$$t = \sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{I_t}{I_i}}, \quad (3.7)$$

a proto je obvyklejší pracovat s ní.



Obr. 3.2: Závislost propustnosti fotografického materiálu na expozici.

Pro rekonstruování hologramu posvítíme na fotografický film referenčním světlem tak, aby vlnoplochy byly rovnoběžné s rovinou hologramu. Tím získáme v každém bodě světlo s konstantní fází a amplitudou. Dopadající světlo je propouštěno úměrně propustnosti t , takže za rovinou hologramu máme až na multiplikativní konstantu to samé světlo, které způsobilo osvit.

Výraz (3.3) můžeme přepsat pomocí rovnosti $|a|^2 = aa^*$, na tvar

$$I = aa^* + AA^* + A^*a + Aa^*, \quad (3.8)$$

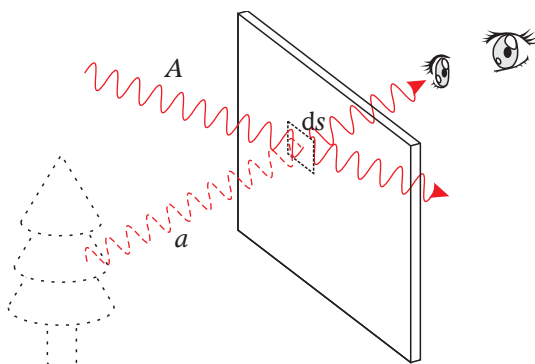
kde $*$ označuje komplexně sdružené číslo. Intenzitě (3.8) je úměrná získaná propustnost

$$t = \beta I, \quad (3.9)$$

a té je úměrná amplituda propuštěného světla podle (3.7). Amplituda světla za hologramem po osvětlení rekonstrukční vlnou B je

$$U = \underbrace{\beta Baa^*}_{U_1} + \underbrace{\beta BAA^*}_{U_2} + \underbrace{\beta BA^*a}_{U_3} + \underbrace{\beta BAa^*}_{U_4}, \quad (3.10)$$

kde B je rekonstrukční osvětlení, které je shodné s referenční vlnou použitou při snímání ($B = A$). Člen U_1 má význam intenzity světla přímo odraženého z objektu, což je ekvivalent pořízení fotografie bez objektivu. U_2 je přímo propuštěné světlo rekonstrukčního paprsku. U_3 je světlo, které je proporcionální interferenci referenční a objektové vlny. Uplatněním asociativity násobení můžeme brát součin BA^* jako intenzitu, která způsobila zatmavení, a tak celý člen U_3 má význam světla odraženého z objektu. U_4 má podobný význam jako U_3 až na to, že jde o komplexně sdruženou světelnou vlnu.



Obr. 3.3: Rekonstrukce zdánlivého obrazu.

Při osvětlení hologramu referenční vlnou je U_4 světlo úměrné interferenci referenční vlny a komplexně sdruženého světla z objektu. Zde nelze uplatnit asociativitu tak, aby nám zbylo pouze světlo z objektu, takže stejně jako světla U_1 a U_2 bude světlo U_4 pokračovat ve směru rekonstrukčního paprsku. My však pozorujeme hologram kolmo, takže rekonstrukční paprsek nevidíme. Viz obrázek 3.3. Do oka nám tak dopadá pouze světlo a , což je světlo z objektu. Tento obraz nazýváme zdánlivý nebo též virtuální.

Pokud nasvítíme hologram komplexně sdruženým rekonstrukčním paprskem B^* , můžeme uplatnit trik s asociativitou na světlo U_4 . Potom zbylá světla odejdou ve směru rekonstrukčního paprsku a zbyde pouze komplexně sdružené světlo z objektu.

Představa komplexně sdružené vlny není nikterak složitá. Vezměme rovinu a na ní dva body (P_1, P_2) mezi nimiž je nenulová vzdálenost d . Na rovinu dopadá rovinná vlnoplocha pod

nějakým úhlem a s konečnou rychlostí. Po dosažení bodu P_1 potřebuje vlnoplocha na dosažení bodu P_2 čas

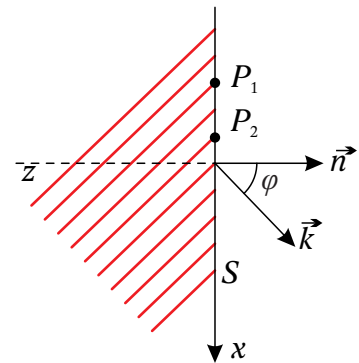
$$t = \frac{d}{\sin(\varphi)c}, \quad (3.11)$$

kde φ je úhel, který svírá směrový vektor vlnoplochy s normálou roviny a c je rychlost světla. Pokud v bodě P_1 bude mít nulovou fázi tak v bodě P_2 má fázi $\Phi = k_x d$. Fáze je úhel, který svírá průvodič komplexního čísla v komplexní rovině s reálnou osou. Komplexně sdružené číslo má oproti původnímu číslu záporně vzatou imaginární složku, což znamená, že jeho fáze φ^* je

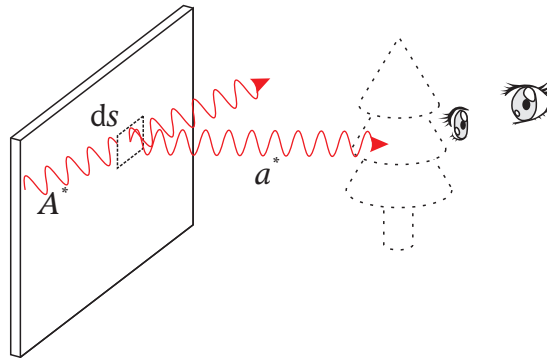
$$\varphi^* = 2\pi - \varphi = -\varphi.$$

Abychom získali zápornou fázi musí být znamínko k_x opačné, tedy vlnoplocha musí na rovinu dopadat pod úhlem $-\varphi$. Tím pádem dorazí nejprve do bodu P_2 a teprve potom do bodu P_1 . Vztaheno k bodu P_1 urazí vlnoplocha zápornou vzdálenost při stejném úhlu, což znamená, že se šíří opačným směrem.

Pro získání komplexně sdružené rekonstrukční vlny stačí na hologram posvítit z druhé strany nebo pod opačným úhlem φ . V obou případech docílíme toho, že vlna prochází zápornou vzdáleností a tedy komplexně sdružené světlo vytváří obraz, kde jsou všechny vzdálenosti opačného znaménka. Prakticky jde o zrcadlový obraz daného objektu. Tento obraz označujeme jako skutečný či reálný.



Obr. 3.4: Průběh vlny po rovině hologramu.

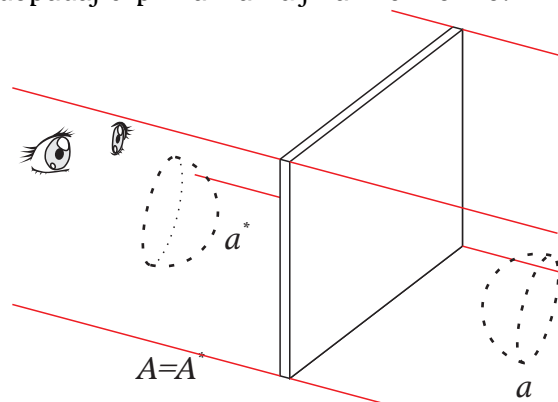


Obr. 3.5: Rekonstrukce skutečného obrazu.

Nepříjemnou vlastností tohoto obrazu je fakt, že zaznamenané světlo z objektu pochází pouze z jeho přední části, a tak se při zrcadlení obrazu zrcadlí i hloubková informace a objekt se nám jeví naruby. Získáváme tak stejný vjem, jako bychom se dívali na otisk objektu v modelíně. Z toho důvodu se osvětlením hologramu pomocí komplexně sdruženého paprsku nebudeme nadále zabývat.

V případě, že referenční vlna při záznamu dopadá na snímač kolmo, je totožná se svojí komplexně sdruženou vlnou a to znamená, že vidíme jak zdánlivý, tak skutečný obraz a navíc světlo úměrné intenzitě (U_1). Samozřejmě je přítomno i světlo U_2 , ale to nenesé žádnou informaci, takže výsledek nijak neovlivní. Směs těchto světél snižuje kvalitu, protože U_1 je vždy rozmazaný obraz scény a pokud zaostříme na skutečný obraz, máme v pozadí rozmazaný zdánlivý obraz a naopak. Proto je vždy potřeba jako referenční světlo používat šikmo dopadající paprsek, jedině tak je možné oddělit užitečný obraz od neužitečného.

Gabor ve svém původním článku popisoval princip holografie pomocí referenční vlny, která je kolmá na rovinu záznamového média. Proto technika nazvaná Gaborův hologram disponuje nízkou kvalitou obrazu. S řešením tohoto problému přišli Leith a Upatnieks pomocí výše popsané referenční vlny dopadající při záznamu jinak než kolmo.



Obr. 3.6: Gaborův hologram.

Umístění hologramu vzhledem k rekonstrukčnímu paprsku by se mohlo zdát problematické, protože vlnová délka světla jsou stovky nanometrů a umístit objekt s takovou přesností je prakticky nemožné. Navíc ani neznáme počáteční fázi ve zdroji. Když umístíme hologram pod správným úhlem do cesty rekonstrukčního paprsku, je fáze pro jeden konkrétní element náhodnou veličinou. Podle rovnice (2.50) z kapitoly 2.9 víme, že fáze i amplituda ostatních elementů je na zvoleném elementu závislá. Rovnice (3.5) nám říká, že v hologramu je uchovaný pouze rozdíl fází. Tento rozdíl se přičte k náhodné fázi, která se v rovině hologramu mění stejným způsobem jako se měnila fáze referenčního paprsku použitého pro záznam. Všechny fáze tak budou posunuty o nějakou konstantu, která není důležitá, protože ze sekce 2.3 o interferenci víme, že je důležitý pouze fázový rozdíl interferujících vln. Fáze rekonstrukčního paprsku je tedy invariantem.

3.3 Vztah mezi optickou a digitální holografii

Při pořizování optických hologramů jsme sledovali elementární plošku snímače nebo fotografického materiálu. Pro potřeby numerického řešení budeme také sledovat amplitudu a fázi na této elementární plošce. Na rozdíl od skutečného světa, kdy prostě odečteme hodnotu zkoumaného elementu, musíme při numerické syntéze hologramu tuto hodnotu vypočítat na základě příspěvků od všech bodů vykreslované scény.

Při použití Rayleigh-Sommerfeldova řešení to znamená, že pro jeden element hologramu musíme pro každou elementární plošku scény spočítat její příspěvek do elementu hologramu. Když uvážíme, že povrch scény je srovnatelný s povrchem hologramu a ten diskretizujeme na $N \times N$ elementů, vyžaduje vytvoření hologramu přibližně N^4 vyčíslení rovnice (2.43). To je naprosto v pořádku, protože každá kmitající nabitá částice ovlivní každou částici v celém vesmíru. Proto i naše izolovaná soustava musí brát v úvahu interakci každé plošky objektu s každým elementem hologramu.

Již mnohokrát zmíněný a použitý princip superpozice zde nalezne další podobu uplatnění. Pro každou plošku můžeme spočítat samostatný hologram a ty potom sečíst ve výsledný hologram scény. Proč tedy neřešit celou plošku najednou, když je rovinná a její vztah k rovině hologramu lze též popsat analyticky? Ukazuje se, že je opravdu možné pomocí Fourierovy transformace analytického popisu plošky spočítat, jak bude vypadat její úhlové spektrum v rovině hologramu (viz kapitola 2.9). Tuto metodu popisuje Lukas Ahrenberg v článku [Ahrenberg08]. Pro reálné použití však jde jen o ukázkový můstek mezi skutečností a numerickým řešením.

3.3.1 Difuzéry

Každý at už přírodní nebo nebo člověkem vytvořený povrch má vlastní specifickou strukturu. Mikroskopické nerovnosti povrchu umožňují světlu, aby se při dopadu rozptylovalo způsobem charakteristickým pro daný povrch. Tyto charakteristiky jsou dány interferencí vlnění.

Například žula má výraznou geometrickou strukturu lomu a zároveň dobře rozptyluje světlo, takže pozorovatel vidí za všech úhlů povrch se stejným jasem. Oproti tomu vinylová deska odráží světlo vždy v místě, kde je normála drážek rovnoběžná s osou úhlu dopadajícího světla a směru pozorování. Vyšším stupněm takového odrazu je kompaktní disk, na kterém jsou patrné jevy interference vlnění. Podle toho, z jakého úhlu se na drážky díváme, tak se potkají příslušné vlnové délky ve fázi, a my vidíme barvu, kterou reprezentují. Protože disk je veliký vzhledem, k vzdálenosti ze které jej pozorujeme, vidíme více vlnových délek v rámci celého disku.

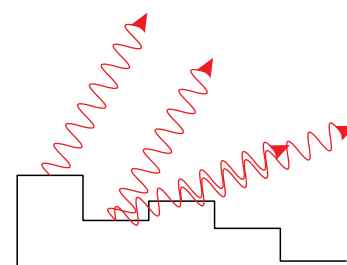
To je jen několik extrémních případů za všechny. Poslední demonstruje, že vzájemná fáze sousedních bodů je důležitým faktorem při vytváření výsledného vjemu. Například matný plast má na dotek dokonale hladký povrch, který je zároveň dokonale difuzní. Mikroskopická struktura totiž způsobuje, že v jednom bodě je dráha světla o několik nanometrů větší než v sousedním a tak dojde k posunu fáze, což je ekvivalentní tomu, že bude existovat směr, kam se světlo odrazí s maximální intenzitou. Když takových dvojic bude na malém prostoru existovat hodně ve všech variacích tak, aby z každého úhlu byl tento prostor vidět v maximální intenzitě, řekneme, že povrch je dokonale difuzní.

V numerické podobě simulujeme tento jev tím, že sousedním bodům objektu dáváme různé fáze, při zachování amplitudy. Pro dokonalý výsledek by bylo potřeba simulovat nerovnosti povrchu a zapojit tak velké množství bodů na malém prostoru. Je proto tendence nalézt takový statistický popis průběhu fáze po povrchu objektu, aby dobře aproximoval difuzní povrchy jakožto i jiné povrchy a zároveň nevyžadoval velké množství bodů, podobně jako to dělá osvětlovací mode Torrance-Sparrow [Torrance67]. Takové funkci říkáme *difuzér*.

Difuzéry zajišťují modulaci fáze v závislosti na poloze bodu tak, aby při jejich pozorování měl povrch, který pokrývají, požadovanou charakteristiku. První, po čem se při vývoji počítačem generovaných hologramů sáhne, je bílý šum. Ten zdánlivě disponuje vlastností požadovanou pro povrchy dobře rozptylující světlo. Skutečně jsou zde všechny kombinace sousedních fází tak, aby ze všech úhlů některé dva body odrazili světlo ve fázi a zajistili tak homogenitu jasu ze všech úhlů pohledu.

Problém je, že povrch při numerickém řešení aproximujeme konečným počtem bodů a tedy i konečnou frekvencí. Konečná frekvence znamená, že maximální odraz pro daný úhel nemusí v omezením prostoru nastat, proto budou existovat místa jasná a místa tmavá a budou mít přibližně rovnoměrné rozdělení. Povrch tedy bude pokryt šumem na místo toho, aby byl jednolitý. Tomuto jevu říkáme *aliasing effect* [Smith97]. V souvislosti s vlnovou optikou se nazývá *speckle* a vyskytuje se při odrazu světla na hrubém povrchu.

Speckle je jev, který nachází uplatnění při holografické interferometrii, pozorování vzdálených hvězd nebo testování zraku, z hlediska generování hologramů je to však jev nežádoucí a je trpěn pouze jako cena za nejsnazší cestu získání difuzéru v podobě bílého šumu. O difuzérech existuje řada článků. Více viz [Brauer91] a odkazy uvnitř článku. Jde však o natolik rozsáhlé a neprobádané téma, že by vydalo na samostatnou práci, a proto se omezíme na použití bílého šumu, protože tato práce není zaměřená difuzéry.



Obr. 3.7: Princip difuzéru – modulace fáze je ekvivalentní rozdílů vzdáleností, které musí světlo urazit na nerovném povrchu.

4 Numerické metody

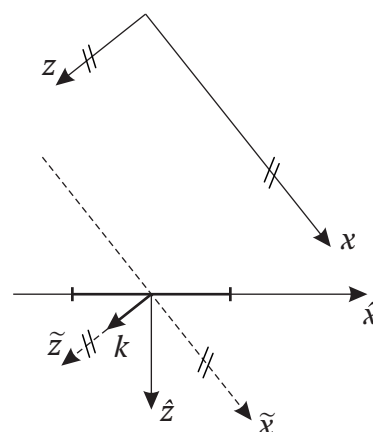
V předchozí kapitole bylo zmíněno, že jak objekt, tak hologram diskretizujeme na elementy konečné velikosti a jejich výpočet provedeme numericky. Než se pustíme do výpočtů, je potřeba navrhnout vhodné metody vyčíslování vztahů odvozených v kapitole o šíření světla. V rámci této práce nás zajímají především výpočty s úhlovým spektrem.

Ne všechny dříve odvozené vztahy lze přímo vyčíslit a tak je potřeba je nahradit aproximací a mezemi, ve kterých je tato aproximace ještě přijatelná. Stejně jako každé numerické řešení i ta zde uváděná budou pouze kompromisem mezi dostupnými technologiemi a ideálem. Jedním z takových řešení je generování hologramů pomocí rotace úhlovým spektrem, které navrhl Kyoji Matsushima. Společně s řešením viditelnosti jej popisuje ve svých článcích [Matsushima03], [Matsushima05] a [Matsushima05b].

4.1 Aproximace objektu

Objekt je geometrické těleso, pro jehož popis máme mnoho aparátů, jako jsou parametrické plochy, CSG operace, boundary representation a další. Každý způsob reprezentace má své klady a více méně lze převádět jeden na druhý. V kapitole o světle jsme pracovali s bodem na povrchu. Pro dobrou reprezentaci objektu bychom potřebovali velké množství bodů, a to při složitosti $O(N^4)$ není dobrý začátek. Další univerzální aproximací je nahrazení objektu množinou trojúhelníků. Trojúhelník je rovinný objekt, a tak lze využít závislost polohy jeho bodů.

Pro potřeby digitální holografie zavedeme tři levotočivé souřadné soustavy. *Referenční* nebo též *světovou*, ve které je umístěna celá scéna a v rovině $(x, y, 0)$ je v počátku umístěn hologram. Vektory této soustavy budou uváděny bez dalších značek. Tato soustava je pouze jedna, proto má přívlastek referenční. *Paralelní* soustava má osy rovnoběžné s globální soustavou, ale je vůči ní posunutá na ose z . Vektory příslušející do paralelního prostoru budeme uvádět s vlnovkou (\tilde{x}). Každá ploška (trojúhelník) bude mít vlastní paralelní soustavu. *Tečná* nebo také *lokální* soustava má vůči předchozím dvěma obecnou polohu. Její osa z je rovnoběžná s normálou příslušného trojúhelníka a osy x a y leží v rovině trojúhelníka. Vektory v tomto prostoru budeme označovat stříškou (\hat{x}) a každý trojúhelník bude mít také svojí soustavu.



Obr. 4.1: Souřadné systémy používané při numerickém řešení.

4.1.1 Tečný prostor

Myšlenku proložení objektu množinou bodů také neopustíme. Víme, že body budou ležet v rovině, kterou snadno reprezentujeme jedním bodem a dvěma směrovými vektory. Pokud tedy body umístíme v pravidelných rozestupech, není potřeba si pamatovat polohu každého bodu, protože jí snadno dopočítáme podle vztahu

$$\vec{P}(\hat{x}, \hat{y}) = \vec{P} + \vec{s}\hat{x} + \vec{t}\hat{y}, \quad (4.1)$$

kde \hat{x} a \hat{y} jsou souřadnice v tečném prostoru plošky, \vec{s} a \vec{t} jsou bázové vektory tečného prostoru vyjádřené v souřadnicích světového prostoru. Zároveň je zřejmé, že normálový vektor \vec{n} je na vektory \vec{s} a \vec{t} kolmý. Pokud budou tyto vektory jednotkové a vzájemně ortogonální, tak bu-

dou tvořit ortonormální bázi prostoru a lze z nich vytvořit matici přechodu z tečného prostoru do prostoru paralelního.

K získání rotační matice přechodu z tečného do paralelního prostoru musíme spočítat normálu trojúhelníka, který máme zadány třemi body $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ v referenční soustavě. Normála je pak dána jako

$$\vec{n} = (\vec{B} - \vec{A}) \times (\vec{C} - \vec{A}), \quad (4.2)$$

kde operace \times znamená vektorový součin. Nyní by stačilo pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace najít ortogonální bázi z normály a dvou stran trojúhelníka. Abychom omezili rotaci o velké úhly, pokusíme se směry bazových vektorů řídit tím, že vektor \vec{s} spočteme jako

$$\vec{s} = \begin{cases} \vec{y} \times \vec{n} \dots \vec{z} \cdot \vec{n} > \varepsilon \\ \vec{z} \times \vec{n} \end{cases}, \quad (4.3)$$

kde \vec{y} a \vec{z} jsou bazové vektory referenčního prostoru. Tak si zajistíme, že vektor s bude svírat minimální úhel s bázi paralelního resp. referenčního prostoru. Zbývá dopočítat poslední bázi tečného prostoru \vec{t} , která je závislá na předchozích

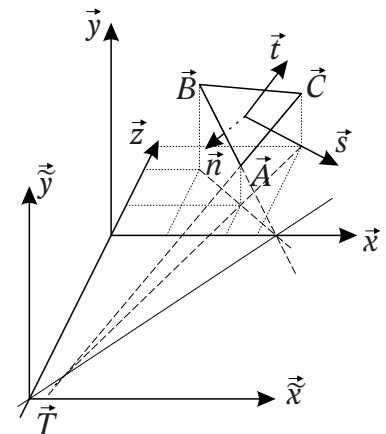
$$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{s}. \quad (4.4)$$

Po normalizaci všech tří vektorů můžeme vyjádřit vztah mezi paralelním prostorem a tečným prostorem přímo jako

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{s}, \vec{t}, \vec{n})}_R \vec{a} \quad (4.5)$$

a přechod opačným směrem, tj. získání souřadnic v tečném prostoru použijeme transponovanou matici

$$\vec{a} = \underbrace{(\vec{s}, \vec{t}, \vec{n})^T}_{R^{-1}} \vec{a} \quad (4.6)$$



Obr. 4.2: Trojúhelník a jeho vztah k tečnému, paralelnímu a referenčnímu prostoru.

4.1.2 Paralelní prostor

Pro získání souřadnic v referenčním prostoru nám stačí paralelní souřadnice posunout do počátku referenční soustavy

$$\vec{a} = \vec{a} - \vec{T}, \quad (4.7)$$

kde \vec{T} je vektor od počátku referenční soustavy do počátku paralelní soustavy. Z výše uvedené definice paralelního prostoru je jasné, že nenulová bude pouze třetí složka vektoru \vec{T} . Viz obrázek 4.2. Vektor \vec{T} je vlastně průsečíkem osy z a roviny definované trojúhelníkem, který zkoumáme. Průsečík je dán následujícím výpočtem

$$T_z = \frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{n_z}, \quad (4.8)$$

kde místo \vec{A} lze použít kterýkoliv vrchol trojúhelníku nebo jeho těžiště.

4.1.3 Trojúhelník v tečném prostoru

Nyní víme, jak vrcholy trojúhelníka přesunout do paralelního prostoru a jak dále získat souřadnice v tečném prostoru pomocí rotační matice. Díky tomu, že transformační vztahy jsou tvořeny na základě samotného trojúhelníka, mají jeho souřadnice v tečném prostoru nulovou složku \hat{z} . Díky tomu můžeme trojúhelník reprezentovat pomocí tří přímk v analytickém tvaru. Jejich předpis získáme ze směrových vektorů jednotlivých stran

$$\vec{u}_A = \vec{B} - \vec{A}, \quad \vec{u}_B = \vec{C} - \vec{B}, \quad \vec{u}_C = \vec{A} - \vec{C} \quad (4.9)$$

tím, že najdeme vektory k nim kolmé

$$\vec{v}_A = (-\hat{u}_{yA}, \hat{u}_{xA}, 0)^T, \quad \vec{v}_B = (-\hat{u}_{yB}, \hat{u}_{xB}, 0)^T, \quad \vec{v}_C = (-\hat{u}_{yC}, \hat{u}_{xC}, 0)^T \quad (4.10)$$

a dopočteme hodnoty jim míry vzdálenosti od počátku souřadného systému

$$d_A = -\vec{v}_A \cdot \vec{A}, \quad d_B = -\vec{v}_B \cdot \vec{B}, \quad d_C = -\vec{v}_C \cdot \vec{C}. \quad (4.11)$$

Když máme analytický popis přímk vymežujících trojúhelník, můžeme celý trojúhelník implicitně popsat pomocí polorovin a jednoznačně tak rozdělit prostor na body, které patří trojúhelníku, a ostatní pomocí jednoduché podmínky

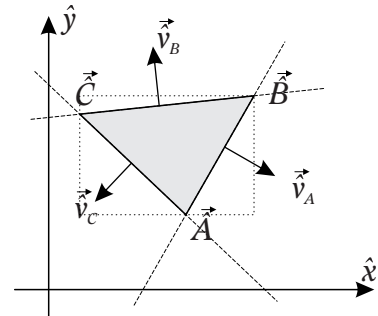
$$(\vec{v}_A \cdot \vec{a} + d_A \geq 0) \wedge (\vec{v}_B \cdot \vec{a} + d_B \geq 0) \wedge (\vec{v}_C \cdot \vec{a} + d_C \geq 0), \quad (4.12)$$

kde \vec{a} a je libovolný bod roviny $\vec{x}\vec{y}$ a jednička znamená pravdivost logické formule na levé straně. Viz obrázek 4.3.

Jak jsme již uvedli, body uložíme v pravidelné mřížce. Pozice v mřížce odpovídá poloze a jediné co ukládáme, je komplexní amplituda bodu. Vzorkování plošky obnáší průchod obdélníkovou oblastí vyznačenou v obrázku 4.3 a v místech náležících trojúhelníku uložit komplexní amplitudu jeho povrchu v daném bodě. Někdo by mohl namítnout, že procházení bodů mimo trojúhelník je zbytečné, protože body trojúhelníka můžeme explicitně určit. To je pravda, ale v případě, že budeme chtít plošku mnohem složitějšího tvaru než je trojúhelník, například plošku zadanou texturou, budeme tento způsob muset použít.

4.2 Povrchová funkce trojúhelníku

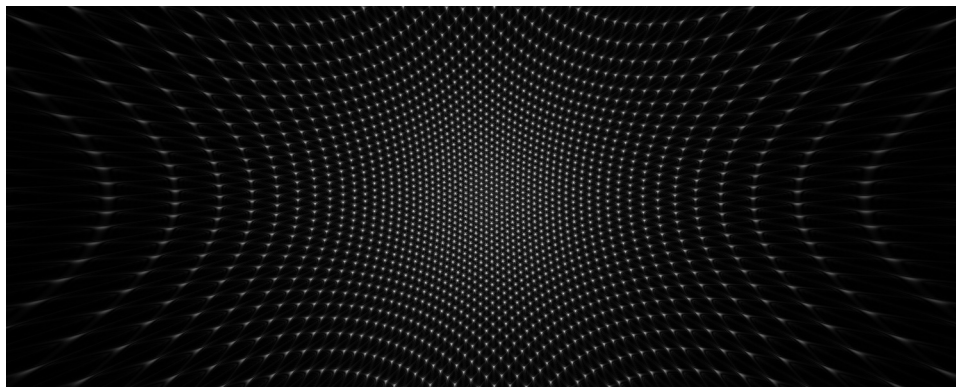
Ve chvíli, kdy samotný trojúhelník vzorkujeme, musíme mít nějaký zdroj hodnot pro sbírané vzorky. Základní požadavek je, aby trojúhelník měl požadovaný jas. O výpočtu jasu jsme se zmínili v sekci 2.10. Co přijde první na mysl, je dát všem vzorkům stejnou hodnotu, vypočtenou na základě vzorečku (2.71).



Obr. 4.3: Trojúhelník definovaný průnikem tří polorovin.

To skutečně má smysl, ale podívejme se, co se stane, když všechny vzorky budou mít kromě stejné amplitudy i stejnou fázi. Feynman ve svých přednáškách [Feynman00] demonstuje interferenci vlnění na několika anténách, které jsou perfektně ve fázi a rozmístěné s konstantním rozestupem. Taková soustava pak vysílá velmi silně ve směru normály mřížky, kterou tvoří a relativně silně do několika dalších směrů, v závislosti na hustotě mřížky a počtu vysílačů.

Pokud tedy necháme fázi napříč celou vzorkovanou ploškou konstantní, bude se tato ploška chovat jako zmíněná soustava. Například malý trojúhelníček vzorkovaný s velkým krokem disponuje početnou množinou směrů odkud se jeví maximálně světlo. Obrázek 4.4 ukazuje optické pole rovnoběžné s rovinou trojúhelníčku v určité vzdálenosti získané pomocí Rayleigh-Sommerfeldova řešení z trojúhelníčku s konstantní povrchovou funkcí.



Obr. 4.4: Projekce mnoha směrů, ve kterých trojúhelníček vyzářuje s maximální intenzitou.

Zde je potřeba uplatnit difuzér, o kterém jsme mluvili v sekci 3.3.1. Již samotná funkce bílého šumu dobře rozruší efekt hlavních a vedlejších maxim a poskytne dobrou aproximaci difuzního povrchu. Ve shodě s Matsushimovým článkem [Matsushima05] zadefinujeme povrchovou funkci trojúhelníku jako

$$h(\hat{x}, \hat{y}) = a(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \exp(-j k \Phi(\hat{x}, \hat{y})), \quad (4.13)$$

kde $a(\hat{x}, \hat{y})$ je funkce amplitudy a $\Phi(\hat{x}, \hat{y})$ je funkce difuzéru. Hodnoty amplitudy se odvíjí od vzorečku (2.71) a mohou být konstantní přes celý trojúhelník nebo mohou být modulovány v prostoru požadovaným vzorem či bitmapou. Naopak hodnoty difuzéru nesmí být konstantní kvůli výše uvedenému efektu. Použitím bílého šumu k modulování fáze získáme jen jeden difrakční obrazec jak je patrné na obrázku 4.5.

Nutno podotknout, že při jemnějším vzorkování počet směrů maximální intenzity prořídne a nejspíše se na hologram ani nevejde. Potom, pokud vůbec, bude vidět trojúhelníček pouze z jednoho směru v maximálním jasu, což je stejné jako kdyby měl zrcadlový povrch a přímo odrazil světlo. Toto je důvod proč Ahrenbergův algoritmus [Ahrenberg08] slouží pouze jako můstek mezi analytickým a numerickým řešením. Ahrenberg totiž stejně jako my omezí trojúhelník přímkami a vyjádří jeho vztah, jakožto i vztah úhlového spektra, k referenční soustavě plně analyticky. Zavedení šumové funkce je v tomto případě prakticky nemožné, protože matematická analýza nemá spojitý popis šumu a pokud přece, jde o tak složité funkce, že by analytické řešení integrálu nemuselo existovat.



Obr. 4.5: Trojúhelníček s bílým šumem, jakožto fázi povrchové funkce (zvětšeno).

4.3 Vzorkování

Až doposud jsme uváděli vztahy v maximální obecnosti, spojitě a ničím neomezené. Numerické řešení vždy znamená diskretizaci a omezení prostoru na okolí místa, které nás zajímá. V případě digitální holografie existuje omezení zdola a tím je polovina vlnové délky světla, se kterým pracujeme. Jemnější vzorkování nemá význam, neboť pomocí světla s vlnovou délkou λ nelze zobrazit detaily menší než λ . To je také důvodem proč vznikl elektronový mikroskop.

Omezení shora přináší technologie použitá pro vyhotovení hologramu. S rostoucí velikostí vzorku klesá úhel prvního vedlejšího maxima a zároveň přibývá řada dalších vedlejších maxim. Celkově se tak omezuje pozice pozorovatele a často se přijde o možnost získat stereoskopický vjem. Proto je velikost vzorku de facto určena velikostí vzorku reprodukčního zařízení.

Počet vzorků zase určuje velikost objektu. Protože světlo se z každého vzorku o velikosti Δx rozptyluje pod úhlem

$$\theta_{\min} = \sin^{-1} \frac{\lambda}{2 \Delta x}. \quad (4.14)$$

Tento vztah uvádí Matsushima v [Matsushima10]. Význam tohoto úhlu je první minimum paprsku. To znamená, že od tohoto úhlu dál sílí první interferenční maximum. Vztah pro interferenční maximum uvádí například [Rusnak07]

$$\theta_{\max} = \sin^{-1} \frac{\lambda}{\Delta x}.$$

Pokud je vzorkování dostatečně jemné, je rozptyl světla z jednoho vzorku dostatečně velký, i první vedlejší maximum je daleko od obrazu, který nás zajímá.

Proto v závislosti na velikosti a vzdálenosti vzorku musíme uvážit další plochu hologramu, který rozptýlené světlo zasáhne. Kupříkladu máme-li vzorkování $\Delta x = 2 \mu\text{m}$, objekt o velikosti 2 cm ve vzdálenosti 50 cm od roviny hologramu a vlnovou délku světla $\lambda = 633 \text{ nm}$, potřebujeme přidat k rozměrům hologramu ze všech stran ještě

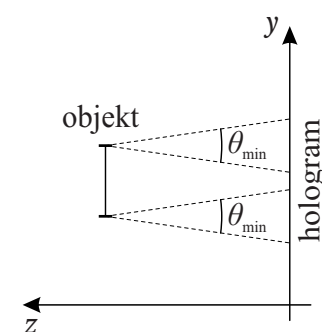
$$d = 0,5 \tan(\theta_{\min}/2) = 0,0398 [\text{m}]$$

což jsou 4 cm a tak na objekt o velikosti 2 cm nám stačí hologram o velikosti nejvýše 10 cm. Samozřejmě s rostoucí velikostí vzorku se úhel θ_{\min} zmenšuje.

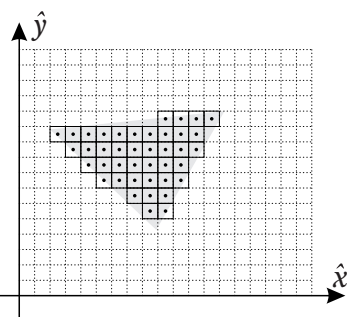
Když už známe velikost hologramu, víme kolik vzorků budeme potřebovat. Vytvoříme tedy tabulku U o N řádcích a M sloupcích, kde M, N jsou celá čísla závislá na šířce (w) a výšce (h) hologramu

$$M = w / \Delta x, \quad N = h / \Delta x. \quad (4.15)$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat, že velikost vzorku je v ose y stejná jako v ose x .



Obr. 4.6: Rozptyl světla na krajních vzorcích objektu.



Obr. 4.7: Hodnoty získané vzorkováním trojúhelníku v tečném prostoru.

4.4 Získání úhlového spektra

Podle výše uvedených vztahů projdeme oblast

$$S = \left\langle \min \{ \hat{A}_x, \hat{B}_x, \hat{C}_x \} \max \{ \hat{A}_x, \hat{B}_x, \hat{C}_x \} \right\rangle \times \left\langle \min \{ \hat{A}_y, \hat{B}_y, \hat{C}_y \} \max \{ \hat{A}_y, \hat{B}_y, \hat{C}_y \} \right\rangle \quad (4.16)$$

resp. buňky tabulky U , jejichž střed leží uvnitř oblasti S , a pro ty buňky jejíž poloha splňuje podmínku (4.12) provedeme vyčíslení vztahu (4.13), kam za amplitudu dosadíme (2.71) a jako difuzér použijeme generátor bílého šumu, který generuje hodnoty v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Výslednou hodnotu h uložíme do právě vzorkované buňky v tabulce U .

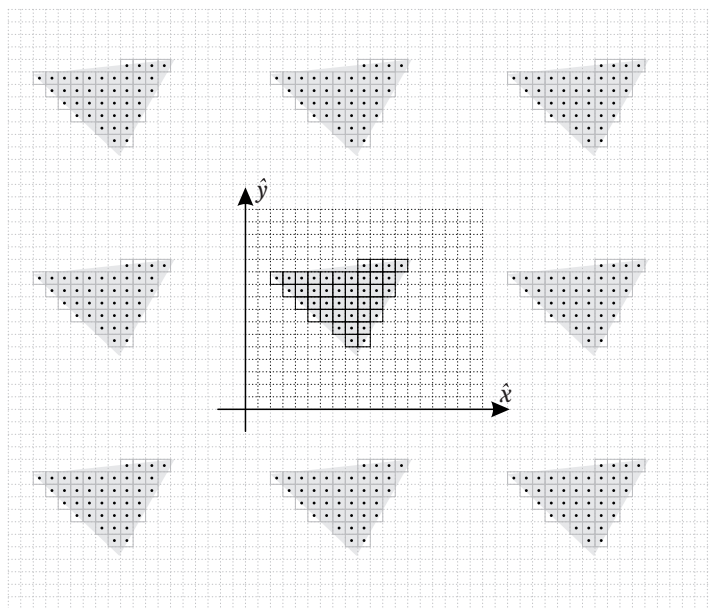
Je zde otázka co dělat s buňkami mimo trojúhelník. Na začátku by tabulka U měla obsahovat nuly. Takže skutečně stačí zapsat pouze do buněk náležících trojúhelníku. Dále v textu v sekci o viditelnosti ploch, bude řečeno proč zapisovat pouze do buněk náležících trojúhelníku. Prozatím se spokojíme se situací, že mimo trojúhelník jsou nuly.

Protože v tuto chvíli máme optické pole v rovině trojúhelníka reprezentované pomocí konečné množiny diskrétních hodnot, musíme se zabývat otázkou jaký vztah je mezi spojitou nekonečnou rovinou a omezenou mřížkou diskrétních hodnot. Fourierova transformace, kterou potřebujeme pro získání úhlového spektra jak jsme jej definovali v kapitole 2.9, používá nekonečné periodické bázové funkce a zároveň používá nespočetné množství těchto funkcí.

$$A(f_x, f_y) = \iint U(x, y) \exp(-j 2\pi(x f_x + y f_y)) dx dy \quad (4.17)$$

Použitím početného množství funkcí se dostáváme od Fourierovy transformace k Fourierovým řadám. Je to vlastně speciální případ Fourierovy transformace pro periodické funkce s periodou w resp. h

$$A(m, n) = \frac{1}{wh} \iint U(x, y) \exp(-j 2\pi(n y/h + m x/w)) dx dy. \quad (4.18)$$



Obr. 4.8: Periodické rozšíření funkce $U(l, i)$, která je zadaná tabulkou vzorků.

Protože naše tabulka komplexních amplitud je omezená, budou celočíselné hodnoty m a n konečné. Zároveň jsme tabulku komplexních amplitud zavedli jako soubor diskrétních hodnot takže integrál ve vztahu (4.18) musíme nahradit sumou

$$A(m, n) = \frac{1}{wh} \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^M U(l, i) \cdot \exp(-j 2\pi (ni \Delta x/h + ml \Delta x/w)) \cdot (\Delta x)^2, \quad (4.19)$$

kde $U(l, i)$ označuje hodnotu z tabulky navzorkovaných hodnot na řádce i a ve sloupci l . Ze (4.15) víme, že $\Delta x/w = 1/M$ a $\Delta x/h = 1/N$ a dvojitá suma z $(\Delta x)^2$ je MN . Takže po dosazení do (4.19) dostáváme

$$A(m, n) = \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^M U(l, i) \cdot \exp(-j 2\pi (ni/N + ml/M)) \quad (4.20)$$

Vztah (4.20) se nazývá dvourozměrná diskrétní Fourierova transformace (DFT). Podrobnější odvození na [Mathworld10] a souvisejících tématech. Pro potřeby zpracování signálů je velice podrobný popis DFT v [Smith97]. Podílu $F_y = n/N$ resp. $F_x = m/M$ říkáme digitální frekvence a udává poměr k vzorkovací frekvenci $f_{max} = 1/\Delta x$ následovně

$$f = F \cdot f_{max}. \quad (4.21)$$

Význam digitální frekvence je počet period na vzorek.

Nyquistův-Shannonův teorém říká, že maximální identifikovatelná frekvence ve vzorkovaném signálu je polovina vzorkovací frekvence. Tj. polovina periody na vzorek neboli $F = 0,5$. Při pohledu na (4.20) je, ale jasně patrné, že digitální frekvence budou nabývat i hodnot větších než 0,5. To však neznamená, že získané prvky analyzované na vyšších frekvencích nebudou mít žádný význam.

Při přechodu ze spojitě Fourierovy transformace (4.17) na Fourierovu řadu (4.18) jsme řekli, že funkce je periodická s periodou délky w , resp h . To znamená, že vzorkovaná funkce $U(x, y)$ nabývá svých hodnot na obdélníku $\langle 0, w \rangle \times \langle 0, h \rangle$ a periodicky se opakuje na všech dalších obdélnících těchto rozměrů. Stejně dobře bychom mohli tuto periodickou funkci vzorkovat na $\langle -w/2, w/2 \rangle \times \langle -h/2, h/2 \rangle$. Když je funkce periodická musí být periodická i její transformace, a tak můžeme hodnoty větší než 0,5 chápat jako záporné frekvence.

Pojem záporná frekvence může znít pro někoho podivně, ale je to podobný jev jako když jsme v kapitole o holografii odvozovali význam komplexně sdruženého světla. Zde má frekvence význam složky směrového vektoru, kterým se šíří rovinná vlnoplocha, jejíž komplexní amplitudu analyzujeme. Připomeňme vztah směrového vektoru vlnoplochy a prostorové frekvence (2.52) z druhé kapitoly

$$\vec{k} = 2\pi (f_x, f_y, f_z)^T. \quad (4.22)$$

Nyní je patrné, že záporné frekvence dávají smysl.

Pro získání úhlového spektra tedy použijeme DFT a navzorkované hodnoty budeme analyzovat stejným počtem frekvencí jako je počet vzorků na šířku (délku) zkoumaného optického pole, abychom tak dostali digitální frekvence v použitelném rozsahu $\langle 0; 1 \rangle$ resp. $\langle -0,5; 0,5 \rangle$. Viz obrázek 4.9. Na obrázku je sytě zobrazena oblast, ve které se nachází vektory rovinných vlnoploch, bledě periodické rozšíření a tlustou čarou je vymezená oblast odpovídající buňkám, ve kterých hodnoty ve frekvenční oblasti získáme.

Při pohledu na vzorec (4.20) je patrné, že pokud jej implementujeme tak jak je, bude mít jenom získání úhlového spektra složitost $O(N^4)$ což je složitost použití řešení Rayleigha a Sommerfelda.

Důvod proč se vydáváme cestou úhlového spektra je, že pro výpočet DFT existuje od roku 1965 algoritmus, který DFT provede v čase $O(N \log N)$ resp. $O(N^2 \log N)$ pro dvourozměrný případ.

Všechny tyto algoritmy jsou poměrně komplikované a svým rozsahem přesahují rámec této práce. Případní zájemci nechtě se obrátí na [Howell01], kde je kromě velmi podrobného popisu principu rychlé Fourierovy transformace (angl. Fast Fourier Transformation – FFT) velmi podrobně rozebrána i teorie spojitě Fourierovy transformace a její využití. Pro méně podrobný výklad se stravitelnějším přístupem je ideální osmá kapitola knihy [Smith97].

Nadále se v textu na rychlou Fourierovu transformaci budeme odkazovat pomocí notace

$$A(m, n) = \mathbf{F}\{U(l, i)\}.$$

a její adresaci ponecháme ve shodě s umístěním vzorků v tabulce. Tj. indexy m, n budou nabývat hodnot 0 až M , resp. 0 až N , protože tak budou uloženy v paměti počítače a tak je vyžadují algoritmy pro rychlou Fourierovu transformaci. Pro operace s úhlovým spektrem však budeme uvažovat vzhled spektra, jako má sytá část obrázku 4.9. Stěhovat data v paměti počítače by bylo neefektivní, a tak přepočítání indexů vyřešíme pomocí jednoduchého vzorečku

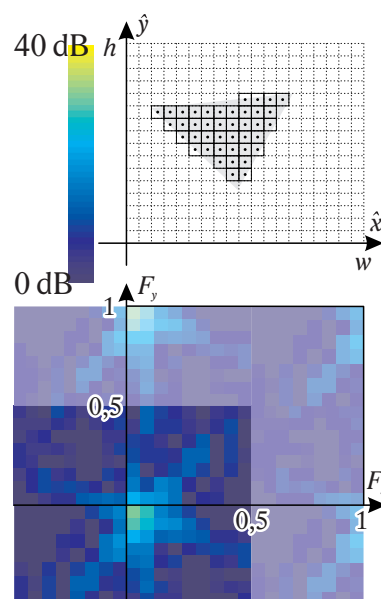
$$\begin{aligned} m &= m_{\text{sym}} & \dots & m_{\text{sym}} \geq 0 \\ m &= m_{\text{sym}} + M & \dots & m_{\text{sym}} < 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

kde sym značí, že jde o indexaci symetrickou kolem nuly. Pro indexy ve směru osy y jakožto i prostorové a digitální frekvence v obou směrech jsou přepočty analogické.

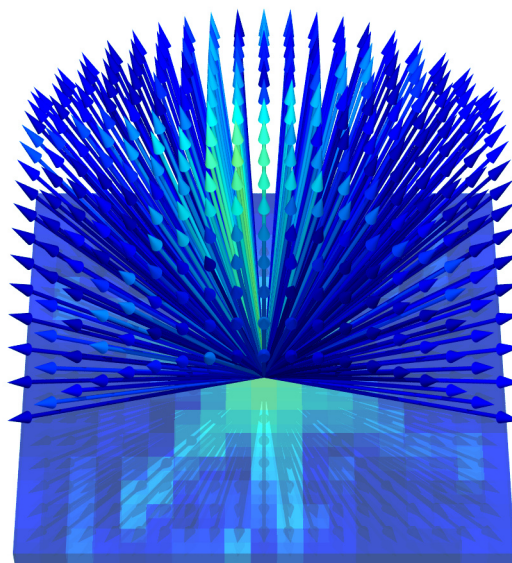
Když už víme, že každá buňka úhlového spektra má implicitně danou polohu ve frekvenční oblasti, můžeme jí dopočítat třetí rozměr pomocí vzorečku (2.56) uvedeného již dříve v části o úhlovém spektru

$$f_z = \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2} \quad (4.25)$$

čímž lze každé buňce úhlového spektra jednoznačně přiřadit plnohodnotný vektor, který už má prostorový význam, protože je směrovým vektorem rovinné vlnoplochy. Jeho parametrem je pak amplituda a fáze dané vlnoplochy. Názorně to ukazuje obrázek 4.10 na následující stránce.



Obr. 4.9: Diskrétní fourierova transformace (dole) navzorkovaného trojúhelníku (nahore) a její periodické rozšíření.



Obr. 4.10: Vztah směrových vektorů rovinných vlnoploch k polohám buněk v úhlovém spektru a jejich hodnotám.

4.5 Propagace úhlového spektra

Toto je jedna z nejsnáze implementovatelných částí celé práce, prakticky stačí brát buňku po buňce, spočítat jí příslušící prostorovou frekvenci ve směru x a y , na základě těchto frekvencí vypočítat frekvenci ve směru osy z a přenásobit komplexní exponenciálou s argumentem úměrným vzdálenosti propagace.

Abychom získali úhlové spektrum posunuté o vzdálenost d , musíme pro každou buňku provést následující výpočet

$$A_d(m, n) = A(m, n) \cdot \exp(-j 2 \pi d \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}) \quad (4.26)$$

přičemž f_x spočteme takto

$$\begin{aligned} f_x(m) &= m / (M \Delta x) & \dots & m \leq M/2 \\ f_x(m) &= (m/M - 1) / \Delta x & \dots & m > M/2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Výpočet f_y je analogický. Posun je samozřejmě možný v obou směrech. Směr propagace určuje znaménko vzdálenosti. Kladné, ve směru vektorů vlnoploch, záporné v opačném. Propagace, ekvivalent posunu, probíhá vždy rovnoběžně s normálou optického pole, kterému úhlové spektrum náleží. Na propagaci úhlového spektra se nadále budeme odkazovat pomocí notace

$$A_d(m, n) = P_d\{A(m, n)\}. \quad (4.28)$$

Vezměme například trojúhelník jehož body v referenčním prostoru jsou $\vec{A} = (-1; -1; 10)^T$, $\vec{B} = (1, -1, 10)^T$, $\vec{C} = (0, 1, 10)^T$ v milimetrech, potom normála trojú-

helníku je $\vec{n}=(0,0,1)^T$ a rotační matice je je identita. Chceme znát hodnoty na hologramu umístěném v rovině $z = 0$ referenčního prostoru. Zde vidíme, že trojúhelník je částečně v záporných poloprostorech. Umisťovat objekty na osu z je praktické, protože jejich kolmý průmět do roviny $z = 0$ je pěkně v počátku soustavy. Z tohoto a mnoha jiných důvodů bychom chtěli střed referenční soustavy mít na středu hologramu. Co tedy s tím, když hologram máme pouze v kladném kvadrantu roviny $z = 0$? Nejsnazší řešení je přidat implicitní posunutí objektů o polovinu šířky, resp. výšky hologramu při jejich vzorkování.

Výše popsany trojúhelník je v referenčním prostoru umístěn stejně jako na obrázku 4.11. Po získání jeho úhlového spektra a propagaci o -10 mm a zpětné transformaci úhlového spektra do prostorové oblasti

$$U_a(l, i) = \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{P}_a \{ \mathbf{F} \{ U(l, i) \} \} \}, \quad (4.29)$$

kde \mathbf{F}^{-1} označuje zpětnou diskretní Fourierovu transformaci, získáme optické pole jako na obrázku 4.12. Pro úplnost ještě uvedme, že zpětná Fourierova transformace je definována úplně stejně jako dopředná transformace. Liší se pouze ve znaménku. Obvykle je normalizována počtem vzorků v transformovaném spektru.

Pro zjednodušení zavedeme konvenci stejně jako pro dopřednou transformaci

$$U(l, i) = \mathbf{F}^{-1} \{ A(m, n) \}, \quad (4.30)$$

kde \mathbf{F}^{-1} značí zpětnou Fourierovu transformaci a má předpis

$$U(l, i) = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M A(m, n) \exp(j 2 \pi (l m / M + i n / N)) \quad (4.31)$$

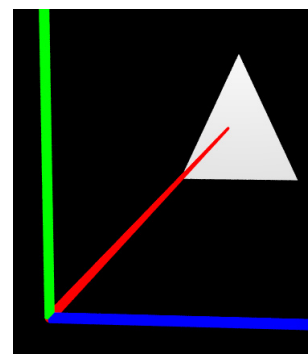
4.6 Rotace úhlovým spektrem

Rotace ve frekvenční oblasti je hlavním bodem celé této práce. Díky němu je možné vykreslovat plošky jiné než rovnoběžné s rovinou hologramu v čase $O(N^2 \log N)$ na jednu plošku. Bohužel numerické řešení rotace úhlovým spektrem není zdaleka tak elegantní jako jeho spojitá podoba v sekci 2.9.2. V diskretní podobě nejde prostě vzít hodnotu vektoru, jehož směr jsme vypočítali rotační maticí.

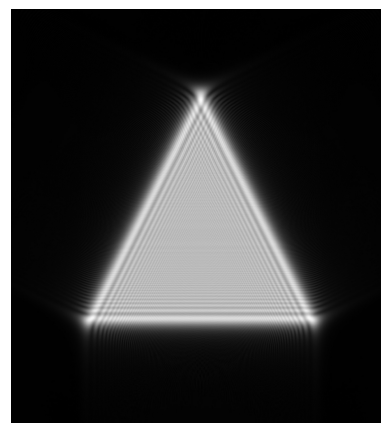
4.6.1 Interpolace hodnot

První problém přichází v podobě nutnosti používat vektory předem daných směrů, protože jejich hodnoty musíme uchovávat v neměnné tabulce. Potom každému vektoru přísluší směr daný pozicí buňky v rámci tabulky viz vztah (4.27).

Pokud tedy ve výsledném úhlovém spektru (A_R) chceme získat hodnotu pro buňku na pozici m, n musíme spočítat směr vektoru, který jí náleží podle zmíněného vzorce (4.27) a pomocí inverzní rotační matice R^{-1} nalézt vektor jež tomuto byl předlohou. Co je zde ihned zřejmé je, že



Obr. 4.11: Trojúhelník ABC v referenčním prostoru.

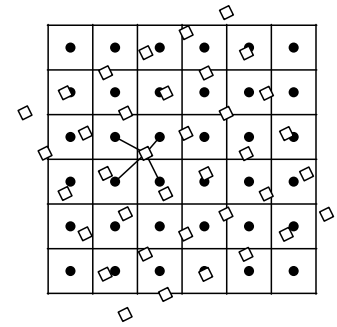


Obr. 4.12: Trojúhelník ABC po propagaci o -10 mm.

rotace se obecně nikdy netrefí do některého z vektorů, jež původní úhlové spektrum reprezentuje. Jsme tedy nuceni zavést interpolaci hodnot okolních vektorů. Interpolování hodnot je však pouze aproximací hodnoty skutečné.

Druhou možností by byla kvantizace vektorů, což by v ideálním případě mělo za následek pouze to, že by rotace nebyla spojitá, ale diskrétní. Jinými slovy existovaly by předem dané polohy, do kterých lze spektrum natočit. Tuto možnost, ale nelze použít z jiného důvodu. Velikost směrových vektorů rovinných vlnoploch je závislá na vlnové délce použitého světla, kdežto velikost vzorku je závislá na technologii použité pro vytvoření hologramu a v současnosti je Δx mnohem větší než $\lambda/2$. O něco dále se budeme tímto problémem zabývat a uvidíme, že při navrženém řešení dochází k singularitám a tím by docházelo k silnému aliasing efektu.

Na obrázku 4.12 vidíme, že hodnoty, které potřebujeme (z míst, kde jsou bílé natočené čtverečky) nemáme, máme pouze hodnoty v místech, kde jsou černá kolečka. Náhražku hodnoty tedy získáme jako vážený průměr nejbližších známých hodnot v okolí. Vážený průměr je v tomto případě bilineární interpolace. Pokud se zamyslíme nad tím, jaký vztah mezi sebou mají sousední hodnoty, zjistíme, že prakticky žádný, protože jde o hodnoty dvou na sobě nezávislých vlnoploch. Na druhou stranu v přírodě je vše spojitě a při dostatečně jemném vzorkování je i v diskrétní podobě frekvenčního přenosu patrná jistá spojitost, takže interpolace má své opodstatnění. Místo, odkud vzorkovat je dáno směrovým vektorem



Obr. 4.13: Ukázka nutnosti interpolovat při rotaci.

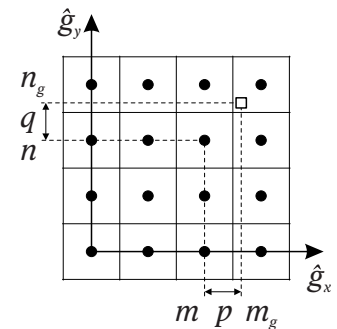
$$(\hat{g}_x, \hat{g}_y, \hat{g}_z)^T = R^{-1}(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y, \tilde{f}_z)^T \quad (4.32)$$

přičemž prostorové frekvence $\vec{\tilde{f}}$ spočteme podle (4.27). Složky \hat{g}_x a \hat{g}_y vektoru $\vec{\hat{g}}$ upravíme tak, aby nabývaly pouze kladných hodnot od nuly do M , resp. N

$$\begin{aligned} m_g &= (\hat{g}_x \Delta x) M & \dots & \hat{g}_x \geq 0 \\ m_g &= (\hat{g}_x \Delta x + 1) M & \dots & \hat{g}_x < 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

pro n_g je výpočet analogický. Tyto hodnoty už jsou upravené pro použití při adresování buněk v tabulce úhlového spektra, ale obecně to nejsou celá čísla. Rozdělíme je proto na desetinou (p , q) a dolní celou část (m , n) tak, aby platilo $m_g = m + p$ resp. $n_g = n + q$. Hodnoty m a n již lze použít pro výběr hodnoty do právě zpracovávané buňky. Abychom nějak zohlednili polohu požadovaného vzorku vzhledem existujícím vzorkům, použijeme bilineární interpolaci a výslednou hodnotu vyjádříme jako

$$A(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y) = (1-q)[(1-p)A(m, n) + pA(m+1, n)] + q[(1-p)A(m, n+1) + pA(m+1, n+1)], \quad (4.34)$$



Obr. 4.14: Znázornění hodnot potřebných pro bilineární interpolaci.

kde m , n , p a q jsou hodnoty získané na základě výpočtů uvedených výše a \tilde{f}_x a \tilde{f}_y jsou prostorové frekvence náležící buňce jejíž hodnoty chceme získat, tj. buňce v cílovém prostoru.

4.6.2 Ztráta informace

Obrázek 4.12 ukazuje, že při rotaci se budeme dotazovat na hodnoty, které nemáme. To je samozřejmě problém, protože místo nich musíme dosadit nuly, protože jinak bychom museli mít vektor, který reprezentuje takovou prostorovou frekvenci v rovině, kterou nejsme schopni vytvořit při výrobě hologramu. Logicky tak dochází ke ztrátě informace ve vysokých frekvencích. Proto jsme v sekci 4.1.1 použili osy referenčního prostoru jako vodítko pro nalezení zbývajících prvků rotační matice, díky tomu se omezí úhel rotace okolo osy z a ztráta informací se minimalizuje.

Podívejme se co se děje s úhlovým spektrem pokud rotujeme okolo osy x nebo y . Jelikož směrové vektory vlnoploch jsou závislé na vlnové délce světla jsou obecně delší než polovina úhlopříčky. Pro jednoduchost uvažme, že rotujeme pouze okolo osy y v kladném směru. Složka x , vektoru reprezentujícího vlnoplochu jdoucí nejvíce doleva, se tak posune ještě více doleva čímž opustí rozsah známých a vůbec reprezentovatelných hodnot. Při ještě větším úhlu se mimo tabulku budou vyskytovat všechny průměty vektorů. Viz obrázek 4.15. To by ovšem znamenalo 100% ztrátu informace a rotace by byla nepoužitelná.

Matsushima řeší tento problém jednoduše tak, že vypočtené průměty posune tak, aby průmět vektoru reprezentujícího stejnosměrnou složku hologramu (vlnoplochu dopadající kolmo na rovinu hologramu) ležel přímo nad stejnosměrnou složkou zpracovávané plošky [Matsushima05]. Průmět stejnosměrné složky je dán stejným výpočtem jako v sekci 4.6.1 přičemž vstupní vektor je $\vec{f} = (0, 0, \lambda^{-1})^T$. Po několika úpravách dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{g}_{x0} &= R_{13}^{-1} / \lambda \\ \hat{g}_{y0} &= R_{23}^{-1} / \lambda\end{aligned}\quad (4.35)$$

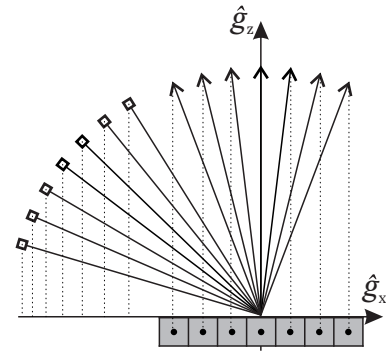
takže výpočet (4.33) upravíme na tvar

$$\begin{aligned}m_g &= ((\hat{g}_x - \hat{g}_{x0}) \Delta x) M & \dots & \hat{g}_x \geq 0 \\ m_g &= ((\hat{g}_x - \hat{g}_{x0}) \Delta x + 1) M & \dots & \hat{g}_x < 0\end{aligned}$$

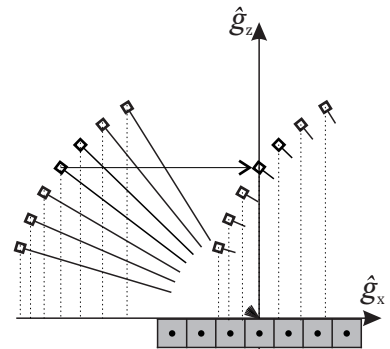
a pro n_g analogicky. Takto máme zajištěno, že vždy budeme mít indexy v rozsahu tabulky úhlového spektra, kterým rotujeme. Názorně to ukazuje obrázek 4.16.

Jak se tato operace projeví na výsledném optickém poli nám říká věta nazývaná Shifting theorem, do češtiny by se to dalo přeložit jako věta o posunu. Ta říká, že posun, ve frekvenční oblasti znamená násobení komplexní exponenciálou v prostorové oblasti. Díky symetrii Fourierovy transformace to platí i v opačném směru. Vezměme větu 34.9 (34.17b) z knihy [Howell01], která říká toto

$$F^{-1}\{A(\hat{g}_x - \hat{g}_{x0}, \hat{g}_y - \hat{g}_{y0})\} = U(\hat{x}, \hat{y}) \underbrace{\exp(j 2 \pi (\hat{g}_{x0} \hat{x} + \hat{g}_{y0} \hat{y}))}_{\text{vlnoplocha}}, \quad (4.37)$$



Obr. 4.15: Požadavek vzorků mimo úhlové spektrum.

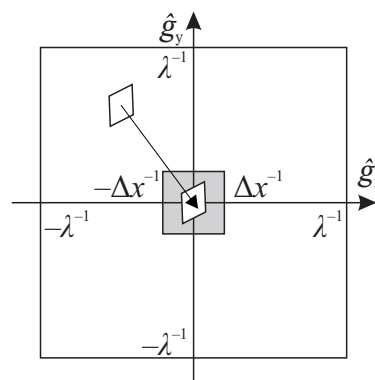


Obr. 4.16: Posun průmětů na střed úhlového spektra plošky.

kde je jasné patrné, že výsledný obraz bude tvořen vlnou plochou, jejíž směrový vektor je kolmý na rovinu hologramu a proporcionální povrchové funkci plošky (4.13). To znamená, že ploška vyzařuje přímo směrem k hologramu. Ačkoliv se toto řešení jeví jako naprosto neopodstatněné, má překvapivě výhodnou vlastnost v podobě směřování světla přímo na hologram.

Nicméně i přes eliminaci 100% ztráty informace, k částečným ztrátám dojde. Obrázky 4.12 a 4.16 jasně napovídají, že budou existovat hodnoty, které vůbec nepoužijeme. V obou případech je to dáno tím, že rotace v tomto případě není bijekcí. V případě 4.12 na sebe nesedí tabulky, v případě 4.16 dochází k singularitám, kdy více požadovaných hodnot vzorkujeme z jedné oblasti. Takže navzorkujeme některé hodnoty vícekrát, ale některé necháme bez povšimnutí, čímž se nepřenesou do nového úhlového spektra a my tak o ně přicházíme.

Dobře je to vidět na obrázku 4.17. Snadno tedy nahlédneme, že pokud bude ploška kolmá k rovině hologramu, vzorkovaná oblast degraduje na velice úzký proužek, odkud budeme vzorkovat, a zbytek hodnot se zahodí. Jediný způsob jak tento nepříjemný efekt eliminovat, je používat velikost vzorku rovnající se jedné polovině vlnové délky použitého světla. Potom při rotaci bude pro každý vektor existovat jeho obraz v úhlovém spektru plošky a rotace bude téměř bijekcí.



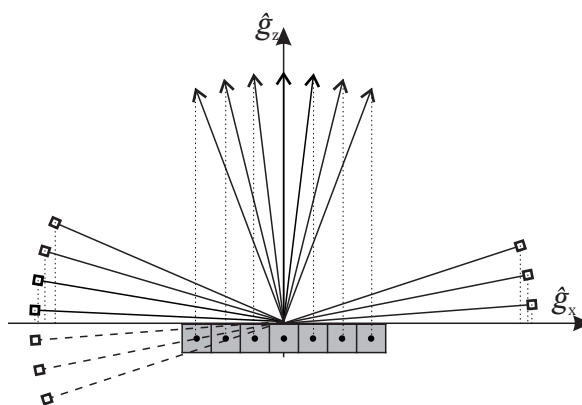
Obr. 4.17: Nevyužité hodnoty (šedé) v důsledku deformace vzorkované oblasti.

4.6.3 Komplexně sdružené vlnoplochy

Pokud je úhel rotace takový, že některé vektory \vec{g} budou mít zápornou složku ve směru z , je potřeba tyto vektory obrátit, a jejich hodnotu vzorkovat jako komplexně sdruženou. Důvod komplexně sdružené hodnoty je identický s myšlenkou komplexně sdružené vlnoplochy popsané v sekci 3.2. Pochopitelně pokud je vzorkovací frekvence taková, že je potřeba vektory posunout, je potřeba tyto opačné vektory posunout opačným směrem

$$U(x, y) = F^{-1} \{ A^* (-g_x + g_{x0}, -g_y + g_{y0}) \} \dots g_z < 0 \quad (4.38)$$

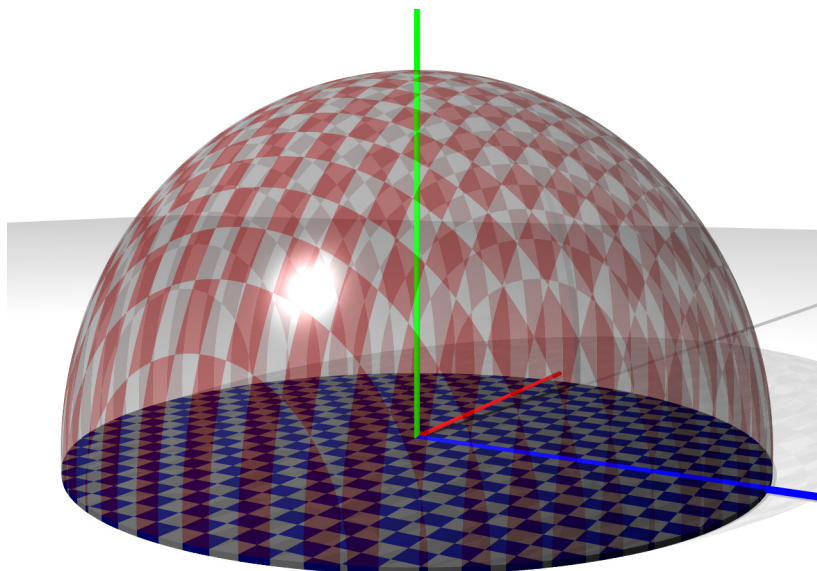
Pro lepší představivost je situace znázorněna na obrázku 4.18.



Obr. 4.18: Výměna vektorů se zápornou složkou ve směru z za jejich komplexně sdružené protějšky.

4.6.4 Vyvážení hodnot pro rotaci

Když pomíneme ztrátu vysokých frekvencí, je zde ještě problém se ztrátou energie. Protože polokouli vyplněnou směrovými vektory reprezentujeme pravidelnou mřížkou v rovině, nedostává každý element mřížky stejný prostorový úhel, za který je zodpovědný. Jinými slovy elementy úhlového spektra, disponují různým množstvím energie, a to nejen podle hodnoty, kterou nesou, ale také podle toho jaký díl kulové plochy jim náleží. Lépe to ilustruje obrázek 4.19.



Obr. 4.19: Vztah elementu úhlového spektra (modrobílá šachovnice) k prostorovému úhlu, který reprezentuje (červenobílý povrch kulové plochy).

Z obrázku 4.19 je jasné, že prvky úhlového spektra si nejsou rovny. My však rotaci chápeme jako rotaci homogenní bitmapou. I Fourierova transformace nijak nezohledňuje váhy jednotlivých frekvencí. Když tedy prvek z kraje, kde má na starosti větší prostorový úhel, „odcestuje“ blíže ke středu, neměl by tam přinést sebou více energie, protože vlnoplocha zde dopadá více kolmo, takže její energie se nerozptýlí na tak velkou plochu jako když dopadá šikmo.

Během rotace musíme jednotlivé prvky zeslabit tak, aby byly rovnocenné a energii nebraly s sebou. Po provedení rotace zase musíme energie zohlednit. V tu chvíli dáváme váhy jiným hodnotám než těm, kterým jsme je před rotací sebrali. U krajů tedy přidáme hodně, u středu téměř nic, takže se energie dostane tam kam má. Pro nulovou rotaci je také vše v pořádku, protože hodnoty se zvětší a zase zmenší stejným koeficientem. Abychom dokázali tento koeficient určit musíme spočítat plochu nad buňkou úhlového spektra

$$S = \iint \frac{1}{\lambda^2} \sin(\varphi) d\varphi d\vartheta \quad (4.39)$$

což je ve vztahu k buňce v kartézské soustavě poněkud nepraktické a tak je potřeba přejít ke kartézským souřadnicím. Úhel elevace (φ) je dán

$$\cos(\varphi) = \frac{f_z}{r} = \frac{\sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}}{1/\lambda} \quad (4.40)$$

takže elevace má následující předpis

$$\varphi = \cos^{-1}(\lambda \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}) \quad (4.41)$$

Jakobián transformace sférických souřadnic je

$$|J| = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2} \sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}} \quad (4.42)$$

dosazením (4.41) do (4.40) a vynásobením (4.42) dostáváme

$$S = \iint \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}} d f_x d f_y, \quad (4.43)$$

kde diferenciál frekvence je

$$d f_x d f_y = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{wh} \quad (4.44)$$

integrál budeme řešit numericky a zajímá nás obsah plochy nad jednou buňkou. Prakticky tedy budeme pouze vyčíslovat vnitřek integrálu. Hledáme poměr velikosti plochy nad buňkou ku velikosti buňky, takže se diferenciály vykrátí a my dostáváme poměr

$$s = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda^{-2} - f_x^2 - f_y^2}}. \quad (4.45)$$

A to není nic jiného než převrácená hodnota (4.41) takže dle očekávání se plocha nad buňkou mění úměrně kosinu úhlu mezi směrovým vektorem vlnplochy a osou z. Kolem nuly je shodná s velikostí buňky a u krajů pak diverguje k nekonečnu.

4.6.5 Střed rotace

Poslední problém, který zbývá vyřešit, je střed rotace. Když jsme definovali Fourierovu transformaci, uvedli jsme, že počátek optického pole je v obrázku vlevo dole. Tudíž i směrové vektory jsou v tomto počátku a pokud probíhá rotace, tak se optické pole pohybuje okolo tohoto bodu. Zároveň v části o reprezentaci objektu jsme ale uvedli, že by bylo dobré mít osu z uprostřed tabulky světelného pole, což jsme vyřešili tím, že před vzorkováním plošku posuneme o polovinu šířky resp. výšky hologramu.

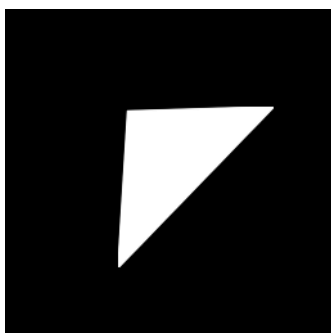
Diskrétní Fourierova transformace o tomto záměru však neví, ta implicitně bere počátek vlevo dole. Zde opět přijde na řadu shifting theorem. Posun v prostorové oblasti znamená násobení komplexní exponenciálou ve frekvenční oblasti. Jelikož přesun v paměti je časově náročný vezmeme si druhou část věty a hodnoty v tabulce úhlového spektra přenásobíme takovou exponenciálou, aby došlo k posunutí středu optického pole do počátku

$$A_s(m, n) = A(m, n) \cdot \exp(-2\pi(0,5m + 0,5n)), \quad (4.46)$$

kde 0.5 je hodnota digitální frekvence, která je ekvivalentní posunu o polovinu šířky resp. výšky tabulky hodnot.

Po rotaci musíme výsledek posunout zpět, na to se opět použije vzorec (4.46). Zpět by se sice měla vzít digitální frekvence záporná, ale uvážíme-li periodicitu naší funkce zadané tabulkou, funkce tak celkem urazí jednu periodu a vrátí se do původní polohy.

Druhým důvodem k rotaci kolem středu obrazu je, že v tomto případě je výsledek nejkvalitnější. Pro demonstraci tohoto jevu jsme vzali trojúhelník jako na obrázku 4.20 a provedli jeho rotaci bez posunu. Viz obrázek 4.21. Aliasing efekt je více než patrný. Oproti tomu na obrázku 4.22, kdy jsme rotovali okolo středu obrázku pomocí posunu (4.46) je aliasing efekt jen málo patrný. Při větších rozměrech obrazu, vzhledem k velikosti objektu zmizí prakticky úplně.



Obr. 4.20: Původní trojúhelník v prostorové oblasti.



Obr. 4.21: Trojúhelník po rotaci ve frekvenční oblasti o 15° bez posunu.



Obr. 4.22: Trojúhelník po rotaci ve frekvenční oblasti o 15° s posunem o (0,5; 0,5).

4.6.6 Jakobián obecné transformace

Jelikož jde o transformaci, která mění integrační proměnou, vzhledem k Fourierově transformaci, je potřeba tuto změnu zohlednit v podobě jakobiánu. Ten popisuje Matsushima v článku [Matsushima03], ale zároveň uvádí, že jde o tak malé příspěvky, že je možné jakobián zanedbat. My však budeme precizní a jakobián uvažovat budeme. Transformační funkce proměnné je

$$\begin{aligned}\hat{g}_x(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y) &= R_{11}\tilde{f}_x + R_{12}\tilde{f}_y + R_{13}\sqrt{\lambda^{-2} - \tilde{f}_x^2 - \tilde{f}_y^2} - R_{13}/\lambda \\ \hat{g}_y(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y) &= R_{21}\tilde{f}_x + R_{22}\tilde{f}_y + R_{23}\sqrt{\lambda^{-2} - \tilde{f}_x^2 - \tilde{f}_y^2} - R_{23}/\lambda\end{aligned}\quad (4.47)$$

Parciální derivace obou funkcí jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{g}_x}{\partial \tilde{f}_x} &= R_{11} + R_{13} \frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}_z} & \frac{\partial \hat{g}_x}{\partial \tilde{f}_y} &= R_{12} + R_{13} \frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}_z} \\ \frac{\partial \hat{g}_y}{\partial \tilde{f}_x} &= R_{21} + R_{23} \frac{\tilde{f}_x}{\tilde{f}_z} & \frac{\partial \hat{g}_y}{\partial \tilde{f}_y} &= R_{22} + R_{23} \frac{\tilde{f}_y}{\tilde{f}_z}\end{aligned}\quad (4.48)$$

kde $\tilde{f}_z = \sqrt{\lambda^{-2} - \tilde{f}_x^2 - \tilde{f}_y^2}$. Jakobián je pak determinantom Jakobiho matice

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{g}_x}{\partial \tilde{f}_x} & \frac{\partial \hat{g}_x}{\partial \tilde{f}_y} \\ \frac{\partial \hat{g}_y}{\partial \tilde{f}_x} & \frac{\partial \hat{g}_y}{\partial \tilde{f}_y} \end{vmatrix}.\quad (4.49)$$

Jakobiánem (4.49) násobíme navzorkovanou hodnotu, abychom tak zohlednili změnu její váhy v důsledku deformace diferenciální oblasti způsobené transformační funkcí (4.47).

4.6.7 Shrnutí rotace

Je patrné, že rotace je velice komplikovaná operace plná různých slabin, které způsobují ztráty informací. Předchozí sekce ukázala, že ani použití vzorků velikosti $\lambda/2$ nezajistí, aby rotace byla bijektivní zobrazení. Tuto skutečnost je potřeba mít stále na paměti. V následující kapitole o řešení viditelnosti uvidíme, že úhlovým spektrem budeme rotovat vícekrát a při každé z rotací dochází ke ztrátě a rozmývání informací dodaných v předchozích krocích.

Pro rotaci zavedeme formální označení stejně jako jsme jej zavedli transformacím a propagací

$$A(\tilde{m}, \tilde{n}) = \mathbf{R}_R\{A(\hat{m}, \hat{n})\}, \quad (4.50)$$

kde vlnka znamená, že hledáme, jak bude vypadat úhlové spektrum v paralelním prostoru a stříška říká, že ho hledáme v tečném prostoru plošky. Podobně je rotace úhlovým spektrem odvozena v Matsushimově článku [Matsushima03] bez analýzy ztráty dat a posunu. Pro shrnutí uvedme výčet kroků, které je potřeba udělat pro dobrou rotaci úhlovým spektrem

- Posun optického pole plošky středem do počátku pomocí shifting theoremu ve frekvenční oblasti.
- Spočtení polohy vektoru nulové složky (\vec{g}_0) ve zdrojovém (tečném) prostoru.
- Pro každou buňku cílového spektra spočítat vektor (\vec{f}) a převést jej do tečného prostoru na vektor \vec{g} .
 - Pokud je složka \hat{g}_z kladná, navzorkovat hodnotu pod směrovým vektorem posunutým o \vec{g}_0 ,
 - jinak vektor \vec{g} vynásobit -1 , posunout o $-\vec{g}_0$ a navzorkovat pod ním hodnotu a použít ji komplexně sdruženou.
 - Hodnotu vynásobit podílem $1/(\lambda \hat{g}_z)$.
 - Hodnotu vynásobit jakobiánem obecné transformace.
 - Hodnotu vydělit podílem $1/(\lambda \vec{f}_z)$.
- Posun optického pole plošky počátkem do středu pomocí shifting theoremu ve frekvenční oblasti.

4.7 Viditelnost

Jakmile se scéna skládá z na sobě nezávislých objektů, je potřeba řešit, který objekt bude vidět, a který bude v zákrytu jiného. V případě klasického vykreslování scény z jednoho pohledu existuje řada technik jako například Z-buffer, horizont viditelnosti nebo dobře známý malířův algoritmus. Malíř pracuje tak, že si nejdříve rozhodne, které objekty jsou od něj nejdále a ty nakreslí první. Až malířovi barva zaschne, může přes vzdálené objekty nakreslit ty, které jsou blíže a zakrývají výhled na objekty v pozadí. Takto postupuje tak dlouho dokud nenakreslí i ty nejbližší objekty.

V případě holografie je situace o poznání složitější. Hologram nabízí plně stereoskopický vjem bez omezení polohy pozorovatele. To znamená, že každý element hologramu musíme chápat jako pozici pozorovatele a viditelnost objektů z této pozice řešit zvlášť. To samozřejmě není problém, pokud použijeme pro výpočet optického pole metodu založenou na výpočtu bod po bodu, například pomocí řešení Rayleigh-Sommerfelda. Takový postup je popsán v [Janda07].

My jsme se však vydali cestou úhlového spektra, která redukuje výpočetní čas na přijatelnou délku. Metoda je to integrální, takže vždy řeší celé optické pole najednou. My tak nemáme možnost ovlivnit dění v jednotlivých elementech hologramu. Matsushima ve svém článku [Matsushima05b] prezentuje, že za jistých předpokladů, je možné použít princip malířova algoritmu. V jeho podání jde doslova o malování světlem.

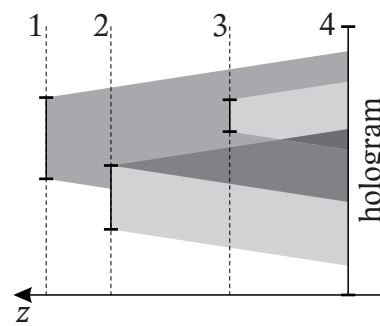
Představme si jednoduchou scénu se třemi trojúhelníky, rovnoběžnými s rovinou hologramu, které jsou umístěny jako na obrázku 4.23 tak, že se zakrývají. Ve shodě s malířovým algoritmem vybereme nejvzdálenější z nich a navzorkujeme jeho optické pole. Pomocí propagace úhlového spektra zjistíme jak vypadá optické pole v místě druhého trojúhelníka. Druhý trojúhelník je neprůsvitná překážka a tak pohltí veškeré záření, které na něj dopadá. Proto v optickém poli vynulujeme buňky náležící druhému trojúhelníku. Tím došlo k zastínění.

Druhý trojúhelník má také vlastní povrchovou funkci, aby byl vidět, kterou navzorkujeme. Zde je důvod, proč jsme dříve v textu upozorňovali na nutnost vzorkovat pouze body náležící trojúhelníku. Zde totiž máme již hotové optické pole předchozího trojúhelníka a kromě zastíněné oblasti jej nesmíme měnit. Pole propagujeme na úroveň dalšího trojúhelníka a postup opakujeme pro všechny zbývající trojúhelníky. Nakonec pole propagujeme o vzdálenost, která zbývá k rovině hologramu.

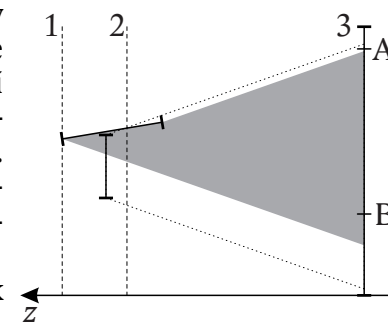
V případě trojúhelníků resp. obecných rovinných plošek rovnoběžných s hologramem je situace naprosto jasná a přesná. Plošky lze jednoznačně seřadit, propagace je bezztrátovou transformací, takže máme nádherný zametací algoritmus pro řešení viditelnosti pro scénu s K polygony a hologram o $M \times N$ elementech se složitostí $O(K M N \log M \log N)$, neboli $O(N^2 \log N)$ na jeden polygon.

V případě plošek v obecné poloze není řazení úplně jednoduché, pomineme-li základní problémy řazení, jako jsou cyklicky se zakrývající trojúhelníky, nebo protínající se trojúhelníky, je zde problém s tím, že světlo se světlo rozptyluje, a my neznáme polohu pozorovatele. Stejně jako na obrázku 4.23 má trojúhelník ještě oblast, do které vyzařuje světlo z jeho povrchové funkce. Pokud se v této oblasti objeví překážka, je jasné, že bude objekt zakrývat. Může nastat konfigurace plošek taková, že se zastíňují vzájemně. Ukazuje to obrázek 4.24. Z bodu A je zastíněna horní část rovnoběžného trojúhelníka. Z bodu B je naopak zastíněna zadní část šikmého trojúhelníka. To se může zdát jako problém, ale nejprve uvedme celý algoritmus viditelnosti. Řešení zmíněné situace vyplyne samo.

Optické pole nejvzdálenějšího trojúhelníka získáme snadno pomocí vzorkování jeho povrchové funkce (kapitola 4.3). Optické pole rovnoběžné s hologramem získáme pomocí rotace úhlovým spektrem (kapitola 4.6). Pro každý trojúhelník, jsme tedy schopni získat optické pole (resp.úhlové spektrum) rovnoběžné s rovinou hologramu. To je slibné, protože pro takovou konfiguraci známe dobrý algoritmus. Problém zůstává se stíněním, náhrada plošky v obecné poloze jejím kolmým průmětem není dokonalá, protože může stínit víc než by měla, nebo naopak propouštět světlo, které by neměla.

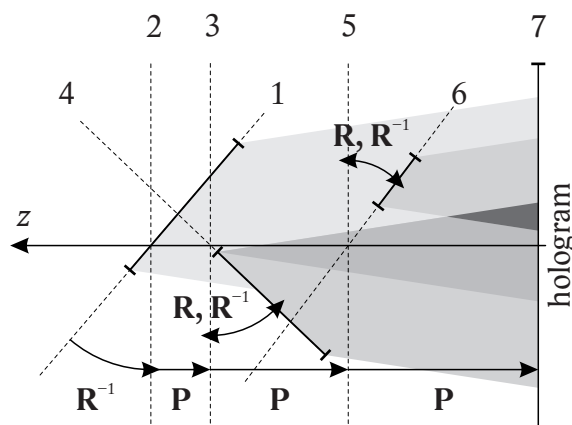


Obr. 4.23: Princip malířova algoritmu v digitální holografii.



Obr. 4.24: Vzájemně se zastíňující objekty.

Jako řešení navrhuje Matsushima přesné maskování pomocí samotné plošky [Matsushima05b]. Pomocí rotace a propagace jsme schopni vyšetřit optické pole na libovolném rovinném řezu prostorem. Nic nám tedy nebrání získat optické pole v rovině trojúhelníka, který je před naposledy zpracovaným, a tam, stejně jako v případě plošek rovnoběžných s hologramem, vynulovat hodnoty, na kterých leží aktuálně zpracovávaný trojúhelník a dosadit hodnoty jeho povrchové funkce. Po navzorkování se pomocí rotace úhlového spektra přesuneme na rovinu rovnoběžnou s hologramem a pomocí propagace úhlového spektra se přesuneme k dalšímu trojúhelníku. Více názorně to ilustruje obrázek 4.25.

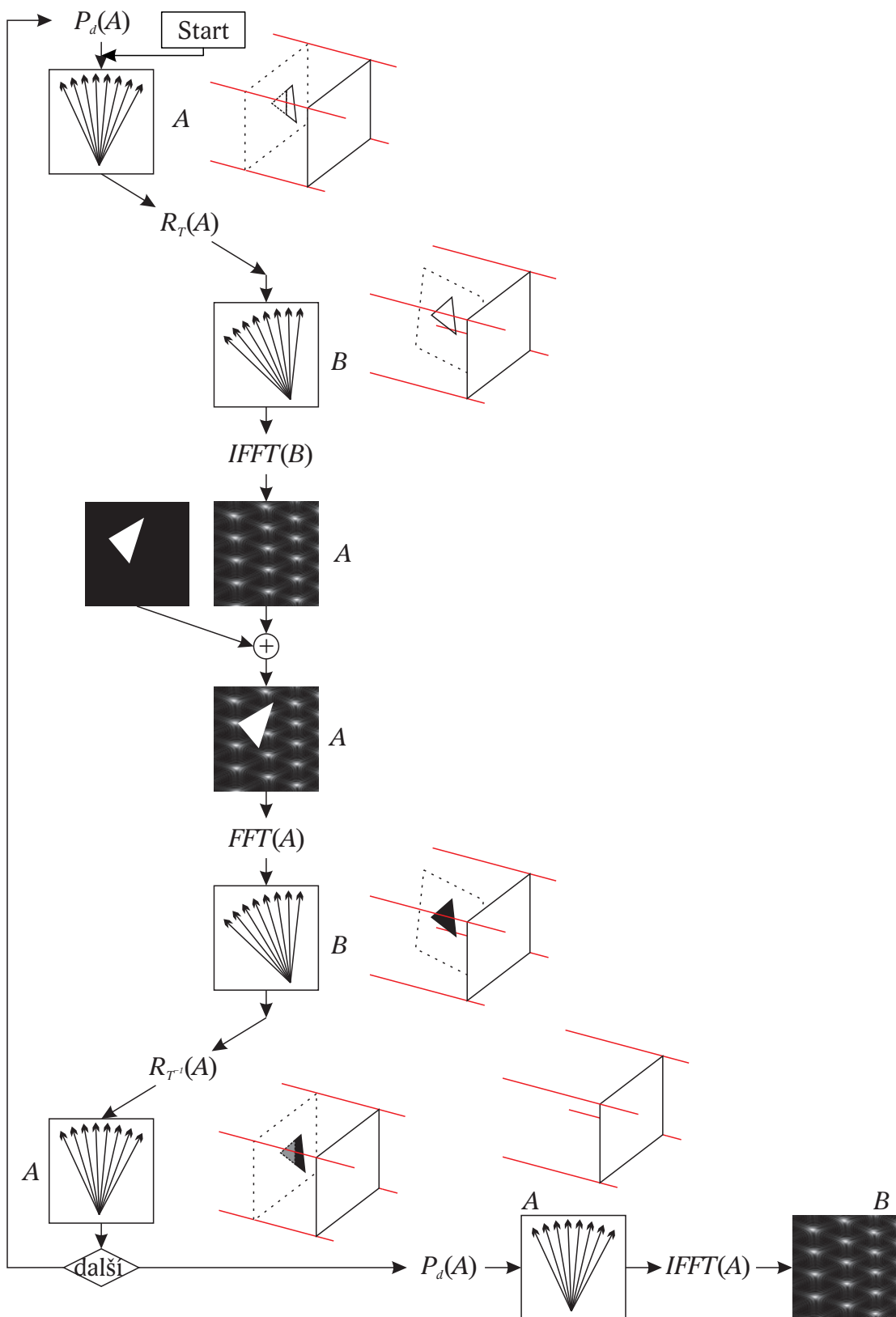


Obr. 4.25: Geometrický význam maskování a návaznost operací.

Začínáme vzorkováním prvního trojúhelníku v rovině 1, získáme úhlové spektrum a poté jím otočíme tak, abychom měli spektrum odpovídající rovině 2. Provedeme propagaci o vzdálenost mezi rovinami 2 a 3, čímž získáme úhlové spektrum v rovině 3. Spektrum otočíme do roviny 4, převedeme na optické pole, navzorkujeme druhý trojúhelník, převedeme na úhlové spektrum a rotujeme zpět do roviny 3. Opět provedeme propagaci tak, abychom získali spektrum odpovídající rovině 5. Otočíme jej do roviny 6, kde po převodu na optické pole navzorkujeme poslední trojúhelník. Optické pole převedeme zpět na úhlové spektrum, kterým rotujeme zpět do roviny a provedeme poslední propagaci až do roviny hologramu. Zde z úhlového spektra uděláme výsledné optické pole.

Na obrázku dále můžeme vidět, že vždy zkoumáme optické pole stejných rozměrů jako celý hologram. To vyplývá z toho, jak jsme definovali rotaci a propagaci. Na první pohled by se mohlo zdát, že propagace postupuje stále směrem k hologramu. Není tomu tak vždy. Pokud trojúhelníček leží tak, že zakrývá část většího, který je natočen opačně, vyjde průsečík roviny, kterou definuje menší trojúhelníček, s osou z v kladné vzdálenosti od průsečíku náležícího většímu trojúhelníku.

Vraťme se k otázce dvou vzájemně se zakrývajících trojúhelníků. Rotace z rovnoběžného řezu na šikmý znamená rotaci úhlovým spektrem a o té jsme si uváděli, že disponuje ztrátami informace. Jako nejhorší případ jsme analyzovali plošku kolmou na hologram. Když se podíváme znovu na obrázek 4.24, vidíme, že vzájemné zakrývání nastává právě v případech téměř kolmých plošek. Pokud tedy přijde takováto ploška a nemáme dostatečně jemné vzorkování, většina doposud nasbírané informace se nenávratně ztratí. Z důvodu ztráty informace během rotace úhlovým spektrem dochází k degradaci plošek, které vstoupili do algoritmu dříve. Z tohoto důvodu není algoritmus příliš šťastně navržený.



Obr. 4.26: Algoritmus řešení viditelnosti. Pomocná grafika s červenými hranami, ukazuje co právě reprezentuje úhlové spektrum.

5 Implementace

Pro realizaci popsaných numerických metod byl zvolen jazyk C++, protože je stále nejefektivnějším programovacím jazykem a to především díky překladu do nativního kódu. Rozměry hologramů začínají u 4096×4096 elementů. Při takových a větších rozměrech je efektivita jazyku kritická.

Nejprve jsme implementovali řešení Raileigh-Sommerfelda pro ověření správnosti dalších metod. Poté jsme přistoupili k implementaci samotného algoritmu, který je více méně popsaného v předchozích kapitolách. Tato část byla nejvíce časově i programátorsky náročná kvůli problémům s diskrétním řešením metod, které byly v článcích popsány spojitě. Poslední částí bylo naprogramování konverzních programů, které převádějí optické pole ze souboru DF [HoloKit08] na binární hologramy připravené pro tisk.

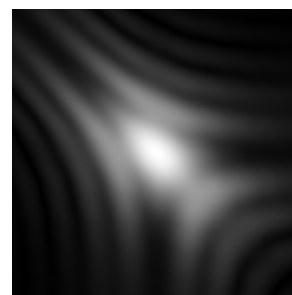
Každá část byla implementována maximálně přenositelně, aby bylo možné jí přeložit pro 32bitové i 64bitové systémy Linux a Windows. Zároveň byly použity takové knihovny, aby bylo dosaženo co nejvyšší rychlosti výpočtu a existovaly pro všechny cílové systémy. Jde o knihovny pthread pro paralelní programování podle standardu POSIX a knihovny rychlé Fourierovy transformace FFTW [FFTW10].

5.1 Pomocná aplikace Rayleigh-Sommerfeld

Tato aplikace sloužila k ověření šíření světla mezi rovnoběžnými rovinami a k prozkoumání chování optického pole při rotaci. Jde o jednoduchý program, který postupně prochází jednotlivé prvky hologramu a počítá příspěvky od všech elementů pevně daného trojúhelníka. Jako povrchová funkce byla použita konstantní amplituda a nulová fáze. Zde se potvrdilo, že difuzér je nepostradatelnou součástí digitální holografie.

Jelikož řešení bod po bodu má složitost $O(N^4)$ a dobře se paralelizuje, bylo implementováno jako vícevláknový výpočet pomocí vláken pthread, aby mohlo být spouštěno na víceprocesorových strojích. Výstupem je pak nekomprimovaná windows BMP s šedotónovou paletou na 8 bitech.

Obrázek 5.1 ukazuje 300×300 vzorků veliký výřez optického pole trojúhelníčku v obecné poloze. Tento difrakční obrazec však není kolmým průmětem trojúhelníčku na rovinu hologramu. Část optického pole na obrázku 5.1 byla pořízena daleko od počátku souřadné soustavy v místě, kde se normála trojúhelníku protíná s rovinou $z = 0$. Jde přesně o jev, který popisuje Feynman ve svých přednáškách na příkladu antén vysílajících daleko přes oceán. Zde se řešení Rayleigh-Sommerfelda neshoduje s Matsushimovou rotací úhlovým spektrem, protože, ta vždy nasměruje světlo k hologramu, nikoliv podél normály plošky.



Obr. 5.1: Trojúhelníček v obecné poloze s konstantní povrchovou funkcí.

5.2 Renderer hologramů

Klíčová aplikace celé práce. Jde o přímou implementaci numerických metod ze čtvrté kapitoly. Celý algoritmus je postaven na rotaci úhlovým spektrem a jeho propagaci. Jeho srdcem je proto rychlá Fourierova transformace. Tu zprostředkovává knihovna FFTW. Nejenom, že umožňuje snadnou paralelizaci pomocí pthreads, ale zároveň využívá v maximální možné míře rozšířenou instrukční sadu procesoru, kde je spuštěna, zejména vektorové instrukce (SIMD).

Program je koncipován jako řádková aplikace, vhodná pro dávkové zpracování. Veškeré volitelné parametry, jakožto i vstupní a výstupní soubory, se nastavují pomocí konfiguračního souboru.

5.2.1 Třídy

Koncepce návrhu je objektová a každá logická entita, která vyplynula z předchozího textu, má vlastní třídu. Třídy tvoří dekompozici celého postupu a vzájemně využívají svých služeb.

`MainEntry` – jde o hlavní objekt, který řídí celý výpočet a zajišťuje správu prostředků tím, že instancuje ostatní třídy a stará se o jejich uvolnění po skončení výpočtu. Zároveň zdrojový a hlavičkový soubor obsahují metodu `main`, která je volána při spuštění programu. Následující úryvek kódu je hlavní částí této třídy a zároveň zachycuje podstatu algoritmu vykreslování a maskování.

```

hologram->setFieldDistance(facetSet[0]->getZAxisIntersection());

double diff;
//--- Vlastní výpočet plošek a jejich přidávání do cílové paměti
for(int i = 0; i < count; i += 1){
    facetSet[i]->process();

    //propagovat k dalšímu trojúhelníku
    if(i + 1 < count){
        diff = facetSet[i+1]->getZAxisIntersection()
            - hologram->getFieldDistance();
        hologram->propagate(diff);
        hologram->setFieldDistance(
            facetSet[i+1]->getZAxisIntersection()
        );
    }
}

//--- finální propagace
hologram->propagate(-hologram->getFieldDistance());
hologram->revertToSpatial();
hologram->normalizeSpatialFieldBySize();
hologram->exportToFile(TargetImage::AUTO);

```

Kód 5.1: Postupné zpracovávání jednotlivých plošek.

`Settings` – je třída, která slouží pro načítání a sdílení parametrů výpočtu jako jsou vstupní a výstupní soubor, směr světla, velikost vzorků nebo šířka a výška hologramu. Hodně metod potřebuje mít tyto informace pro svoji činnost a předávat je všechny parametrem by bylo nepraktické, proto si každá třída uchovává ukazatel na instanci třídy `Settings`, která je v celé aplikaci jediná. Metody, které parametry potřebují, je pak mají v členské proměnné. Součástí třídy je i parser jednoduchého formátu `název:hodnota`, který je použit v konfiguračním souboru.

`TargetImage` – reprezentace samotného optického pole. Je hlavním těžištěm aplikace, protože veškeré numerické metody prezentované v předchozí kapitole, zde nabývají konkrétního tvaru. Během instancování se alokují dvě pole (`memoryA`, `memoryB`), pro komplexní čísla, v takové velikosti jakou udává instance třídy `Settings`.

Může se zdát zbytečné alokovat druhé pole, když propagace je per element operace a fourierovu transformaci lze provést in-place tj. bez další paměti navíc. Naneštěstí rotaci in-place provést nelze, protože pro každý element na základě transformace vektoru vzorkujeme z místa, které je vzhledem ke skladbě paměti prakticky náhodné a navíc některá místa slouží pro vícenásobné vzorkování. Takže ani vhodným rozplánováním by nešlo provést výměnu kus za kus.

Pro přechod od optického pole k úhlovému spektru se po alokování paměti naplánuje dopředná a zpětná pro převod z jednoho pole do druhého a zároveň i naopak. První důvod je, že transformace z paměti do jiné paměti je rychlejší. Navíc se urychlí povolením zničit obsah zdrojové paměti pro vlastní pomocné výpočty.

Pro přehlednost kódu se používají ukazatele s názvem `imageField` a `angularField` jejichž cíle se mění z `memoryA` na `memoryB` a opačně, podle potřeby rotací. Patrné je to na obrázku 4.26. Plánovač transformací však potřebuje znát paměti již při plánování, takže se připraví zpětné i dopředné transformace z `memoryA` do `memoryB` a opačně a při přechodu od úhlového spektra k optickému poli se rozhodne, který plán použít. Navíc `memoryA` a `memoryB` jsou neměnné během výpočtu, takže na konci máme jistotu při uvolňování paměti, že ukazatel skutečně ukazuje na paměť, která se má vrátit.

Propagace úhlového spektra je řešena prakticky přímou implementací vzorce (4.26) se zohledněním přepočtu pozice buněk podle (4.27). V dalším vývoji by bylo vhodné tuto operaci provádět paralelně, protože její charakter per element transformace to dobře umožňuje.

Jak jsme poznali v sekci 4.6 o numerickém řešení rotace úhlovým spektrem, je potřeba zdrojové spektrum ekvalizovat, aby všechny jeho prvky byly energeticky neutrální. K tomu slouží další per element transformace implementovaná podle vzorce (4.45). Navrácení míry energie probíhá během rotace, protože je závislé na vektoru, který byl předlohou pro vektor ve zdrojovém spektru.

Samotná rotace používá jako základ vzorec (4.34) jehož vstupní hodnoty jsou ze vzorce (4.33) a závisí na rotační matici a pozici aktuálně vzorkované buňky podle (4.32). Zohledněno je zde samozřejmě i vzorkování komplexně sdružené hodnoty opačného vektoru v případě, že transformovaný vektor má opačnou složku ve směru osy z .

Po rotaci je ještě potřeba zohlednit deformaci vzorkovaného elementu vlivem obecné transformace, takže je zde implementace násobení jakobiánem podle (4.47) opět jako per element operace.

Na závěr analýzy rotace jsme uváděli, že je potřeba optické pole posunout tak, aby se rotovalo okolo středu. Pro tento případ je zde metoda pro posun ve frekvenční oblasti implementovaná opět jako per element operace.

Po vypočtení optického pole pro hologram je potřeba výsledek uložit, za tímto účelem jsou zde dva výstupní formáty. Pro potřeby ladění je to `windows BMP`, která jako informaci nese amplitudu jednotlivých elementů, normalizovaných podle nejvyšší hodnoty amplitudy v poli. Druhý formát je `DF [HoloKit08]`, který navrhli Ivo Hanák a Martin Janda jako součást své výzkumné činnosti v oblasti holografie. Tento formát uchovává elementy pole jako plnohodnotná komplexní čísla ve formátu `IEEE754 single` nebo `double precision`. V `DF` se hodnoty normalizují pouze plochou hologramu při každé zpětné Fourierově transformaci.

`FacetProcessor` – Tato třída slouží jako reprezentace jedné vykreslované plošky, od instance `SceneLoader` si vyžádá jednu plošku. Při získávání plošky si rovnou vypočítá rotační matici, která definuje její tečný prostor. Až během výpočtu přijde na řadu, vezme si od instance třídy `TargetImage` pole `imageField` a do něj navzorkuje plošku, kterou reprezentuje. Jelikož se objekt `TargetImage` předává jako úhlové spektrum v poloze rovnoběžné s hologramem, musí si každá ploška zajistit jeho propagaci do místa průniku osy z s rovinou, ve které leží. K tomu používá metody zveřejněné objektem `TargetImage`.

Po navzorkování plošky se opět hologram vrátí do polohy rovnoběžné s hologramem. Tím skončí životní cyklus plošky a na řadu se dostává další instance `FacetProcessor`. Postup se opakuje, dokud se nezpracují všechny položky.

`SceneLoader` – je abstraktní třída vytvořená tak, aby definovala rozhraní, pro načítání scény z různých formátů. Umí uchovávat pole trojúhelníků, na požádání trojúhelník vydat, a sama si hlídá paměť. Zbytek je činností konkrétní implementace.

`CSVSceneLoader` – konkrétní implementace abstraktní třídy `SceneLoader` pro jednoduché načítání trojúhelníků jakožto devític hodnot z textového souboru, kde na řádcích jsou trojúhelníky a každý sloupec je jedna souřadnice vektoru.

```

double Rtransposed[9];
transpose(R, Rtransposed);

//rotovat úhlovým spektrem
hologram->equalizeAngularSpectrum();
hologram->shiftAngularSpectrum(-width/2, -height/2);
hologram->rotateAngularSpectrum(Rtransposed);
hologram->shiftAngularSpectrum(width/2, height/2);

//navzorkovat plošku
sampleFacet();

//rotovat úhlovým spektrem zpět
hologram->equalizeAngularSpectrum();
hologram->shiftAngularSpectrum(-width/2, -height/2);
hologram->rotateAngularSpectrum(this->R);
hologram->shiftAngularSpectrum(width/2, height/2);

```

Kód 5.2: Otočení optického pole do roviny plošky, vzorkování plošky a otočení optického pole zpět.

5.2.2 Ostatní kód

Kód, který je příliš obecný na to, aby byl zabalen ve třídě a zároveň je potřeba ve více místech, je soustředěn do souboru `Utils.cpp`. Nachází se zde převážně vektorové operace, potřebné při zacházení s geometrií. Důležitou funkcí je `atan2(double x, double y)`, která ze zadaného dvourozměrného vektoru vypočte úhel, jež svírá s osou x . Na rozdíl od klasické metody `atan(double x)`, která jako argument přijímá tangens úhlu a vrací úhel $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, naše metoda `atan2(double x, double y)` používá vektor $(x, y)^T$ k tomu, aby vrátila úhel v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Další pomocné kusy kódu jsou soubory `structures.cpp`, kde je definice hlavičky souboru `DF`, a `saveBitmap.cpp`, který umožňuje jednoduše vyexportovat obrazová data do širace podporovaného formátu.

5.3 Binarizace Hologramů

Aby mělo veškeré naše snažení smysl, je optické pole potřeba rekonstruovat ve skutečném světě. Možností je hned několik. Elektronová litografie je pravděpodobně nejlepší dostupná technologie pro vytváření syntetických hologramů. Elektronový paprsek může být velice tenký, a díky možnosti řídit jeho směr pomocí magnetického pole, generovaného vychylovacími cívkami, i dokonale přesně nasměrován.

Ostřelovaný materiál změní strukturu a může být dále chemicky zpracováván, přičemž neozářená místa budou reagovat jinak. Vzor je tak možné zesílit, čímž jeho hloubka bude natolik znatelná, že jej bude využít jako raznice a obtiskávat do hliníkové fólie. Ta potom bude odrážet světlo v závislosti na hloubce protlačení a díky jemným vzorům bude možné využít interferenci světla. Takovýmto reflexním hologramům říkáme embosované. Jejich hromadná výroba je nenákladná a kvalita vysoká. Používají se především jako ochranné prvky. Na rozdíl od výroby je pořízení razící matrice velmi nákladné, takže pro experimentální účely je tato technologie nevhodná.

Druhou možností je vytváření transmisních amplitudových hologramů, tak jak jsou popsány ve třetí kapitole. K tomuto účelu se používají filmy s fotocitlivou emulzí vysoké denzity. Dobře realizovatelný způsob záznamu by byl vytištění zvětšeného amplitudového hologramu na papír a jeho zmenšení na film pomocí fotoaparátu viz kapitola o digitální holografii v [Goodman05].

Skutečně tato možnost tu je, ale je potřeba dodržet tři podmínky. Za prvé mít film s takovou denzitou, aby černé body skutečně nepropouštěly světlo. Za druhé mít film s takovou velikostí zrn, aby bylo možné zaznamenat elementy požadované velikosti, tj. v řádech jednotek mikrometrů, nebo lépe v řádech stovek nanometrů. Třetí podmínkou je použití objektivu s dostatečným rozlišením, aby nedošlo ke zničení difrakčního obrazce při průchodu soustavou čoček objektivu. Jelikož fotografický průmysl zdaleka nepotřebuje takové rozlišení, je získání takové techniky velice obtížné a nákladné. Pro experimentální použití tedy výhodnější, ale pořád ještě moc složité.

Film s fotocitlivou vrstvou, která má velkou denzitu a jemné zrno se hojně používá tam, kde je potřeba optickou cestou potřeba přenést informaci na jiný materiál. Elektronický průmysl tak přenáší tištěné spoje na měděné položky a polygrafický průmysl zase tiskové vzory na tiskové desky či síta pro sítotisk.

K vytvoření filmů s předlohou se používají osvitové jednotky a fotoplottery. Obě zařízení provádí osvit pomocí laseru zaostřeného na tenký bod na povrchu filmu. V případě fotoplotteru je film upnutý na rotující válec a podél něj se posouvá laserový paprsek, který je modulován sloupečky obrazu, který se má kreslit. V případě osvitové jednotky je film upnutý na vnitřní straně válce, který stojí a uvnitř rotuje zrcátko odrážející konvergentní paprsek laseru také modulovaný vytvářeným obrazem.

Obě technologie disponují přesností v jednotkách mikrometrů. Fotoplottery mají velmi jemný posun, až 1 μm , ale co do průměru paprsku se pohybují přes 15 μm . V případě osvitových jednotek jde o 3600 DPI, což odpovídá 7 mikrometrům, a to jak umístění, tak velikosti osvitového bodu. Díky vysoké poptávce po tištěných spojích je osvit na fotoplotteru na velice kvalitní film poměrně levný a tudíž přijatelný pro experimentování. Nesrovnatelně větší poptávka po tiskovinách řadí osvitové jednotky na první místo v poměru ceny ke kvalitě. Navíc velikost bodu 7 μm je lepší než 15.

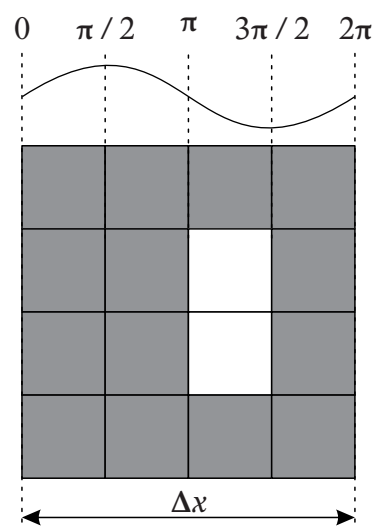
Výsledný film je v daném místě buďto plně průsvitný, nebo plně neprůsvitný. To poměrně snižuje manévrovatelnost v oblasti amplitudy, potažmo intenzity. Musíme tedy absenci různých úrovní propustnosti materiálu nahradit vhodnou skladbou binárních elementů. Vzhledem ke zvolené technologii byly zvoleny metody detour-phase a prahování.

5.3.1 Detour-phase

Metoda, která světlo moduluje jak v amplitudě, tak ve fázi. Vycházíme z popisů v [Hariharan02] a [Goodman05]. Jakožto element optického pole využívá skupinu více elementů osvitové jednotky. Viz obrázek 5.2. Protože světlo lze modulovat pouze binárně, tj. propustit či ne, nejde tiskem modulovat fáze. Lze však ovlivnit to, kolika otvory bude světlo procházet a ve kterém místě většího elementu se otvory objeví.

Pokud dokonalá rovinná vlnoplocha dopadá rovně na hologram, je ve všech jeho místech konstantní fáze. Pokud ale vlna bude dopadat pod nějakým jiným úhlem než pravým, bude fáze napříč povrchem hologramu lineárně závislá. To jsme ostatně odvodili v teoretickém úvodu o světle. Pokud tedy budeme potřebovat nějakou konkrétní fázi, stačí vědět, ve kterém místě se vyskytuje a z něj si světlo nechat propustit. Aby byl problém řešitelný v souladu s tiskem v kartézské soustavě, budeme předpokládat, že hologram je vůči světlu pootočen pouze kolem osy y . Tj. v ose y je fáze konstantní, v ose x je lineárně závislá.

Obrázek 5.2 již předesílá, že budeme chtít, aby na jednom elementu metody detour-phase proběhly všechny fáze světla.



Obr. 5.2: Element metody detour-phase.

Úhel pod jakým musí dopadat světlo na hologram, tj. úhel mezi směrovým vektorem a osou z , je dán vztahem

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \cos^{-1} \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (5.1)$$

Takto si připravíme povrch, kde každý tiskový bod bude zabírat jeden interval fází. Podle fáze v elementu hologramu snadno spočteme, který z intervalů vybrat a udělat průsvitný. Spočteme poměr požadované fáze ku 2π

$$p = \Phi / 2\pi \quad (5.2)$$

vynásobíme počtem kroků fáze (e), které máme k dispozici v jednom elementu Δx

$$d = pe \quad (5.3)$$

a z d vezmeme dolní celou část. Ta říká kolikátý sloupeček elementu Δx má být průhledný. Velikost elementu Δx volíme jako celočíselný násobek velikosti tiskového bodu.

Zbývá vyřešit, jak modulovat množství propuštěného světla. Ve třetí kapitole jsme hovořili o propustnosti, která řídí amplitudu. Podle amplitudy tedy určíme, kolik (r) tiskových bodů na výšku nechat průsvitných ve sloupečku s požadovanou fází. Opět pro jednoduchost uvažme, že počet kroků fáze je stejný jako počet kroků amplitudy, aby element byl čtvercový.

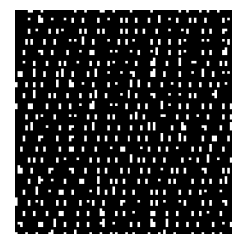
$$r = \frac{|U(m, n)|}{|U|_{\max}} e, \quad (5.4)$$

kde $U(m, n)$ označuje právě zpracovávaný element optického pole na řádku n a ve sloupci m a $|U|_{\max}$ označuje maximální amplitudu v rámci celého hologramu.

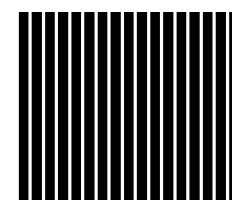
Aby obdélníčky byly co možná nejvíce na středu vytvářeného elementu, zavedeme jednoduché pravidlo jak mají být vysoko. Od celkového počtu kroků e odečteme počet průsvitných tiskových elementů a tento rozdíl celočíselně vydělíme dvěma. Výsledná hodnota říká o kolik tiskových elementů posunout průsvitné tiskové elementy nahoru, aby byly pokud možno uprostřed.

Nastavování úhlu pomocí úhloměru či pravítka by bylo téměř nemožné, a tak je pro potřeby nastavení správného úhlu umístěn nad hologram referenční proužek. Ten se skládá z elementů několik milimetrů vysokých a Δx širokých. Vždy je zprůhledněn takový sloupeček, aby měl vzhledem k ostatním stejnou fázi. To zajistí, že při správném natočení bude tento proužek maximálně jasný, protože dojde ke konstruktivní interferenci, a tak budeme mít jistotu, že paprsek dopadá na hologram pod správným úhlem.

Program na převod formátu DF do bitmapy reprezentující tiskovou předlohu hologramu detour-phase je opět koncipován jako řádková aplikace a vzhledem k tomu, že většina parametrů je součástí formátu DF, dodávají se zbylé parametry jako argumenty příkazové řádky. Prakticky se jedná pouze o velikost tiskového elementu a počet kroků. Program sám zhodnotí jestli součin těchto parametrů odpovídá velikosti elementu optického pole.



Obr. 5.3: Výřez z detour-phase hologramu.



Obr. 5.4: Výřez referenčního proužku.

Více o této metodě naleznete v [Goodman05] a [Hariharan02], kde je prezentována v inverzní podobě, protože se předpokládá vytištění na papír a zmenšení fotografickou cestou na černobílý negativní film. My jsme se z výše zmíněných důvodů vydali cestou přímého osvit filmu, tudíž celou metodu prezentujeme jako přímou.

5.4 Metoda prahování

Jako druhá metoda byla zvolena již dříve uplatněná metoda prahování. Metoda je to sice velmi jednoduchá, zato však překvapivě účinná a odolná proti chybám. Prakticky jde o velmi hrubou aproximaci amplitudového hologramu jak byl popsán v kapitole 3 o holografii.

Při tvorbě amplitudového hologramu fotochemickou cestou pracujeme s propustností materiálu, která má určitý interval hodnot. Osvitové jednotky mají také několik hodnot propustnosti. Přesněji řečeno dvě. Světlo vyvolaným filmem buďto projde, nebo ne. Podobně jako jsme u metody detour-phase kvantizovali amplitudu do e kroků tiskových elementů, které je možné nechat průsvitné, kvantizujeme v tomto případě pouze pro jeden element. Je-li amplituda větší než polovina maximální amplitudy, necháme element průhledný. V opačném případě element exponujeme, aby zčernal a stal se tak neprůhledným.

Zvolený práh, od kterého nechávat elementy průhledné, nemusí být nutně polovina maximální amplitudy. Je možné jej libovolně posouvat a tak experimentálně najít ideální dělicí poměr. Nám se dobře osvědčila zmiňovaná jedna polovina.

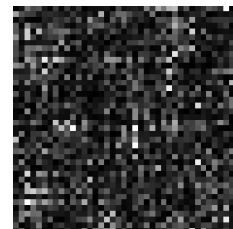
Pokud se nad vztahem mezi metodou prahování a amplitudovým hologramem zamyslíme hlouběji, dojdeme k poznání, že jsou ekvivalentní a prakticky jde o to samé. Když se vytváří amplitudový hologram, používá se film pokrytý tenkou vrstvou želatiny, která je napuštěná krystalky solí stříbra. Při jejich exponování dojde k fotochemické reakci, která způsobí, že při zpracování se tyto krystaly spojí se stříbrem ve vývojce. Neosvícené krystaly nezreagují a vyplaví se pryč. Film tedy také disponuje binárním vzorem. Zde jsou však rozměry elementů hluboko pod vlnovou délkou světla, a tak mohou tvořit skupinu, která světlo filtruje tím, že je v ní krystalů více nebo méně, popřípadě mají větší či menší rozměr podle dávky energie, kterou přijaly.

Kdybychom měli možnost, jak řízeně osvítit jednotlivé krystaly, popřípadě je osvítit volitelným množstvím světla, mohli bychom vygenerovaný hologram přesně vytvořit fyzicky. Dostupnou máme zatím pouze technologii osvitových jednotek, a tak hologram vytváříme jakoby na materiál, kde velikost zrn solí stříbra je rovna velikosti tiskového elementu.

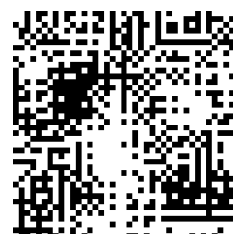
Před samotným prahováním je k hologramu přičtena referenční vlna s amplitudou rovnou maximální amplitudě v optickém poli. Její úhel musí být větší než dvojnásobek difrakčního úhlu, aby došlo k prostorovému oddělení skutečného a zdánlivého obrazu. V případě naší aplikace to je

$$\varphi = 4 \sin^{-1} \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (5.5)$$

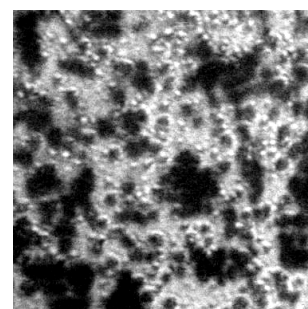
Po přičtení referenční vlny se pochopitelně změní maximální amplituda a tak je potřeba jí znovu najít před konečným prahováním.



Obr. 5.5: Intenzita optického pole hologramu.



Obr. 5.6: Výřez z binarizované amplitudy opatřené referenční vlnou.



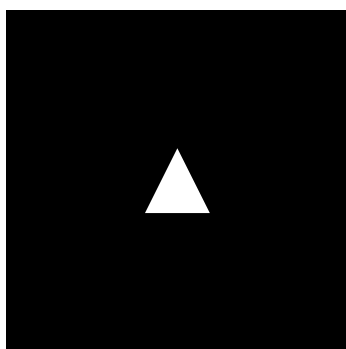
Obr. 5.7: Binární vzor vysvícený na film. Snímek z mikroskopu.

6 Získané výsledky

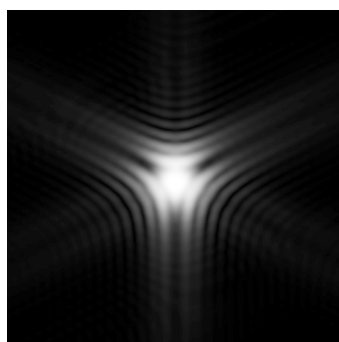
Pro demonstraci správné činnosti programu a výše uvedených algoritmů bylo vytvořeno několik jednoduchých scén, na kterých budou demonstrovány výsledky. Jelikož je celá metoda zaměřená na zpracování větších plošek v obecné poloze vzhledem k rovině hologramu, jsou scény jednoduché soustavy několika málo trojúhelníků.

6.1 Numerická rekonstrukce

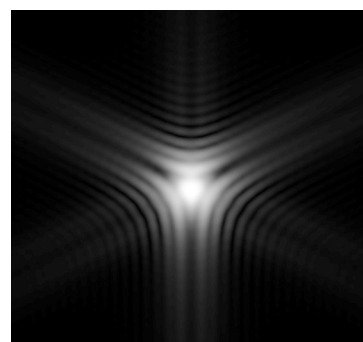
První scéna se skládá z jediného trojúhelníka 6.1 rovnoběžného s rovinou hologramu, aby bylo možné porovnat jí s výsledkem výpočtu pomocí řešení Rayleigh-Sommerfelda. Jeho vrcholy v milimetrech jsou $\vec{A} = (-0,1; -0,1; 10)^T$, $\vec{B} = (0,1; -0,1; 10)^T$, $\vec{C} = (0; 0,1; 10)^T$ a hologram se nachází v rovině xy , se středem v počátku. Jako povrchová funkce byla zvolena konstantní amplituda a nulové fáze, protože bez ní má obraz jasné rysy vlnění, na rozdíl od zašuměných výsledků s difuzí. Vlnová délka světla je 635 nm a velikost vzorku 2 μm .



Obr. 6.1: Optické pole trojúhelníku ABC ve vzdálenosti 10 mm od hologramu.



Obr. 6.2: Optické pole trojúhelníku ABC v rovině hologramu. Řešení Rayleigh-Sommerfelda.

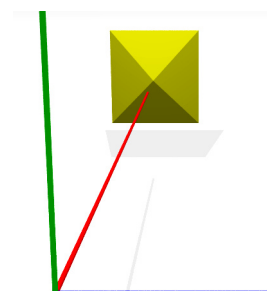


Obr. 6.3: Optické pole trojúhelníku ABC v rovině hologramu. Propagace úhlového spektra.

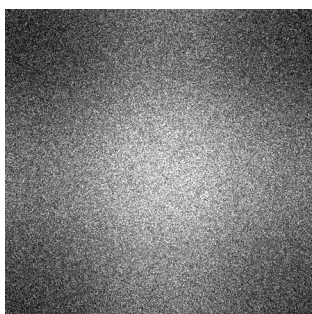
Obrázky 6.2 a 6.3 jsou prakticky totožné při srovnání nenormalizovaných hodnot optického pole. Jejich rozdíl je výrazně menší než hodnoty amplitud optického pole. To potvrzuje fakt, že dekompozice na rovinné vlnoplochy a propagace úhlového spektra jsou ekvivalentní ostatním řešením uvedeným v kapitole o světle. Při zpětné propagaci jsme dostali obrázek shodný s obrázkem 6.1.

Nadále jsme se zabývali pouze scénami několika trojúhelníků s difuzí. Konkrétně byly vytvořeny dvě scény. Scéna ve tvaru pyramidy byla první vícetrojúhelníkovou scénou, na které jsme pozorovali veškeré ztráty způsobené rotací. Její vrcholy jsou $\vec{D} = (-0,1; -0,1; 10)^T$, $\vec{E} = (0,1; -0,1; 10)^T$, $\vec{F} = (0,1; 0,1; 10)^T$, $\vec{G} = (-0,1; 0,1; 10)^T$, $\vec{H} = (0; 0; 9,5)^T$ v milimetrech. Viz obrázek 6.4.

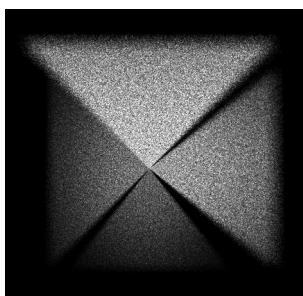
Na obrázku 6.5 vidíme optické pole v rovině hologramu pro pyramidu. Velikost elementu optického pole jsou zde dva mikrometry. Obrázek 6.6 je numerickou rekonstrukcí pyramidy s řešením viditelnosti podle Matsushimova algoritmu bez odebrání vah podle polohy v úhlovém spektru před rotací a jejich vrácení po ní. Je patrné, že první (dolní) trojúhelník je vzhledem k okolním výrazně tmavší, ačkoliv by neměl. Zavedením kompenzace vah podle navrženého řešení v kapitole 4.6.4 se jas trojúhelníků neztrácí s každou rotací. Viz obrázek 6.7.



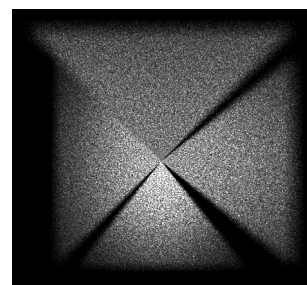
Obr. 6.4: Model pyramidy a jeho poloha vůči souřadnému systému.



Obr. 6.5: Intenzita optického pole v rovině hologramu pro scénu s pyramidou.



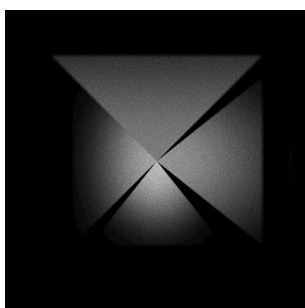
Obr. 6.6: Numerická rekonstrukce pyramidy vypočtené bez ekvalizace úhlového spektra.



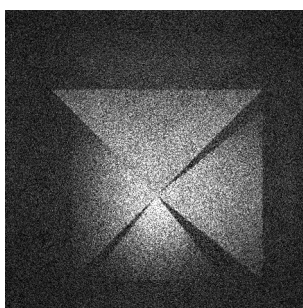
Obr. 6.7: Numerická rekonstrukce pyramidy s ekvalizací úhlového spektra.

Dále je patrné, že s každou rotací ztrácí trojúhelníky vyšší frekvence a celkově dochází k jejich deformaci. Prvním renderovaným je dolní trojúhelník. Ten prošel celkem sedmi rotacemi a je výrazně menší než poslední přidávaný trojúhelník (horní), který prošel pouze jednou rotací a je tak prakticky bez chyby.

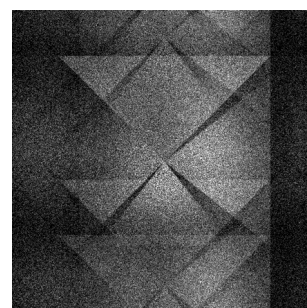
Když byl program připraven, přistoupilo se k převodu optického pole na binární hologram. Výřezy obou zvolených a implementovaných metod byly k vidění v kapitole 5.3. Binární hologram byl ověřen numerickou simulací, která potvrdila, že práh i metoda jsou použitelné. V tomto případě byla pyramida $100\times$ větší ve vzdálenosti 745 mm od roviny hologramu.



Obr. 6.8: Numerická rekonstrukce pyramidy ze souboru DF.



Obr. 6.9: Numerická rekonstrukce pyramidy z amplitudového hologramu.

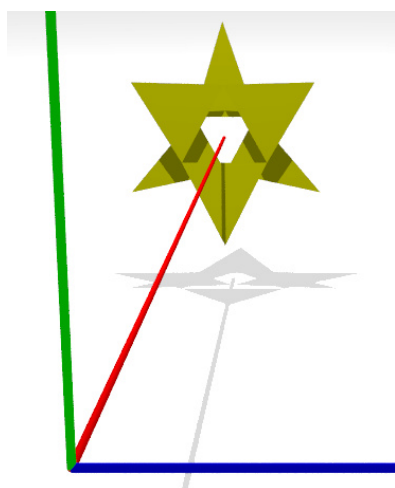


Obr. 6.10: Numerická rekonstrukce pyramidy z detour-phase hologramu. Velikost původního elementu je $28\ \mu\text{m}$.

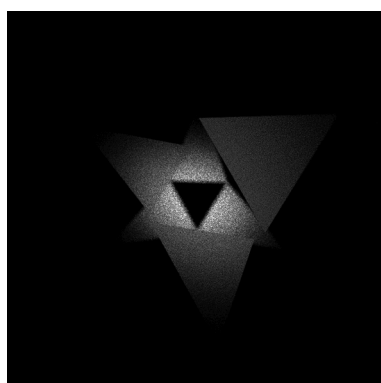
Obrázek 6.8 je přímou numerickou rekonstrukcí optického pole. Tedy ideálním výsledkem. Na obrázku 6.9 je numerická rekonstrukce amplitudového hologramu pyramidy s velikostí vzorku $14\ \mu\text{m}$. Výsledek je narušen šumem, což je daň za hrubou aproximaci propustnosti. Dále je patrný posun způsobený přidanou referenční vlnou.

Rekonstrukce z phase-detour hologramu na obrázku 6.10 nevypadá tak dobře jako z amplitudového. Nicméně se domníváme, že způsob numerické rekonstrukce vnáší toto rozkopírování obrazu na základě aproximace větších průsvitných otvorů pomocí více stejných bodů. Ty pak působí jako skupina zářičů, která má více úhlů, ve kterých jejich záření interferuje. Vycházíme tak z pozorování, že kopie obrazu se objevuje pouze ve vertikálním směru. Při rekonstrukci se větší otvory chovají jako spojitý zdroj světla a tak by k tomuto jevu nemělo docházet.

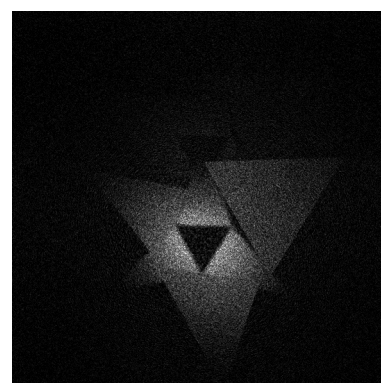
Další zkoumanou scénou byla soustava 6 trojúhelníků poskládaných dokola tak, že vypadají jako květ. Tři trojúhelníky leží v rovině rovnoběžné s hologramem dále od ní a tři blíže natočené směrem k hologramu. Viz obrázek 6.11.



Obr. 6.11: Umístění scény s lotosem v prostoru.



Obr. 6.12: Numerická rekonstrukce lotosu přímo z optického pole. Velikost elementu je $14\ \mu\text{m}$.

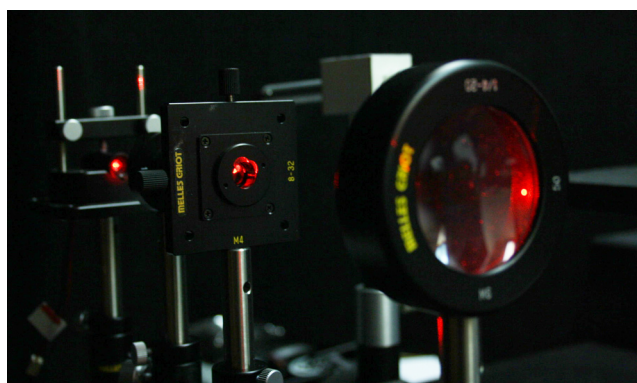


Obr. 6.13: Numerická rekonstrukce lotosu z amplitudového hologramu. Velikost elementu je $14\ \mu\text{m}$.

Vidíme, že rekonstrukce z amplitudového hologramu na obrázku 6.12 se od přímé rekonstrukce z optického pole na obrázku 6.13 liší pouze posunem a šumem. Dále vidíme, že maskování skutečně funguje a viditelnost je v pořádku. Co je ovšem nepříjemné, je fakt, že tvar objektu, se výrazně liší od zadané geometrie. Tento jev jsme pozorovali již u pyramidy, kde byl méně vážný.

6.2 Optická rekonstrukce

Pro potřeby optické rekonstrukce byl hologram vyhotoven tiskárnou Sedmik pomocí osvitové jednotky s rozlišením 3600 DPI. K rekonstrukci byla použita soustava laserového ukazovátka, objektivu z mikroskopu, kruhové štěrbinu, spojné čočky držáku hologramu a stínítka. Vše upnuté na optické lavici. Pomocí objektivu z mikroskopu se tenký paprsek zúží do jednoho bodu uprostřed kruhové štěrbinu, aby tak vznikl bodový zdroj světla bez dalších vedlejších vlnoploch. Takto vyčištěný zdroj světla se šíří v podobě kulových vlnoploch směrem ke spojné čočce, která je umístěna tak, že její ohnisko je právě ve vytvořeném bodovém zdroji světla. Za čočkou vzniká rovnoběžný paprsek světla tvořený rovinnými vlnoplochami.



Obr. 6.14: Optická soustava použitá pro rekonstrukci obrazu.

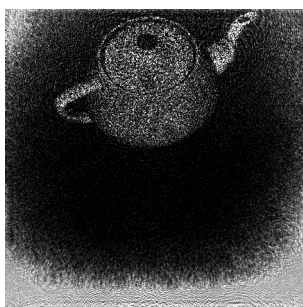
Focení probíhalo tak, že se do vhodné vzdálenosti od čočky umístil hologram v držáku a do příslušné vzdálenosti za něj stínítka na kterém se formoval skutečný obraz. Ten se snímal digitální zrcadlovkou na stativu, protože nízká intenzita světla vyžadovala delší expoziční doby.

Pro ověření zda metoda binarizace funguje byl vytvořen model konvičky pomocí balíku aplikací Holo toolkit, který vytvořili Ivo Hanák a Martin Janda [HoloKit08]. U tohoto hologramu máme jistotu, že je v pořádku a pokud by nebyl vidět, tak je jasné, že chyba je v binarizaci

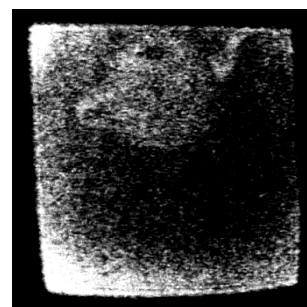
nebo vlastní výrobě filmů. Velikost vzorků hologramu s konvičkou je $14\ \mu\text{m}$, což je dvojnásobek tiskového elementu osvitové jednotky. Tento rozměr jsme zvolili záměrně, abychom eliminovali chybu osvitové jednotky a byli schopni rozhodnout zda jde o chybu binarizace či tisku.



Obr. 6.15: Numerická rekonstrukce konvičky přímo z optického pole.



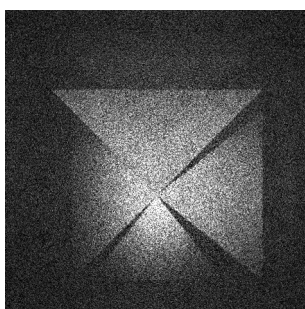
Obr. 6.16: Numerická rekonstrukce z binárního amplitudového hologramu.



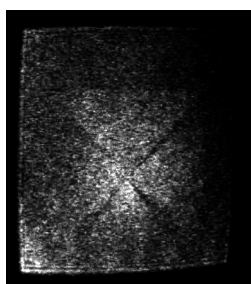
Obr. 6.17: Optická rekonstrukce vyrobeného amplitudového binárního hologramu.

Z obrázků 6.15, 6.16 a hlavně pak 6.17 je jasně patrné, že binarizace funguje jak má, a vyhotovený hologram je také v pořádku. Nic nám tedy nebrání srovnat numerickou simulaci rekonstrukce našich hologramů s jejich optickou rekonstrukcí.

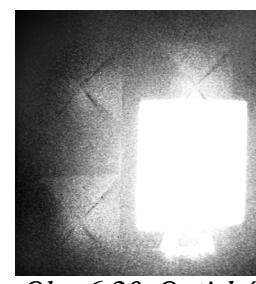
Jak pyramidu tak lotos jsme vyhotovili pro velikosti elementu $7\ \mu\text{m}$ a $14\ \mu\text{m}$. Pro lepší orientaci je vždy přiložena numerická rekonstrukce hologramu s velikostí elementu $14\ \mu\text{m}$.



Obr. 6.18: Numerická rekonstrukce pyramid z amplitudového hologramu.

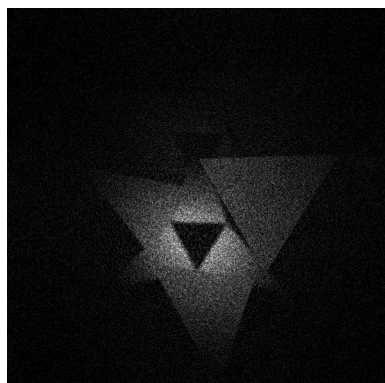


Obr. 6.19: Optická rekonstrukce hologramu s velikostí elementu $14\ \mu\text{m}$.

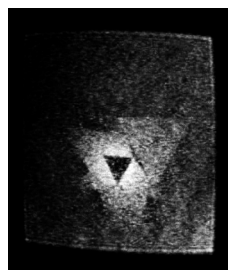


Obr. 6.20: Optická rekonstrukce pyramid z binárního amplitudového hologramu. Velikost elementu $7\ \mu\text{m}$.

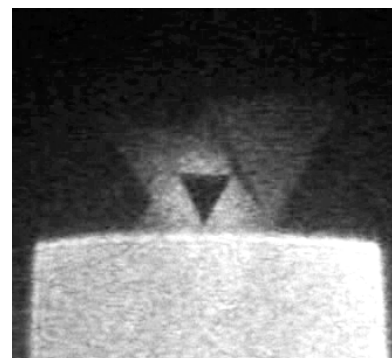
Na obrázku 6.20 je dobře patrné periodické rozšíření optického pole, zároveň je vidět, že již $7\ \mu\text{m}$ velké tiskové elementy dobře ohýbají světlo.



Obr. 6.21: Num. rekonstrukce z ampl. hologramu. ($14\ \mu\text{m}$)



Obr. 6.22: Optická rekonstrukce lotosu z ampl. hologramu. ($14\ \mu\text{m}$)

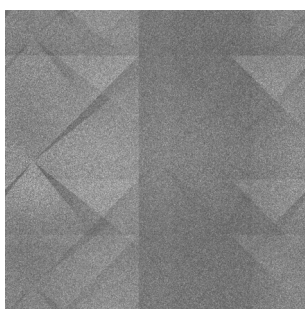


Obr. 6.23: Optická rekonstrukce ampl. hologramu. ($7\ \mu\text{m}$)

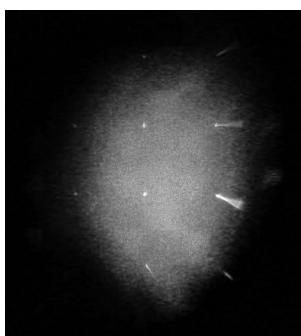
Obrázky 6.22 a 6.23 opět ukazují, že jak 14 μm tak 7 μm poskytují slušné výsledky. Tiskárna, která zhotovila filmy byla vybrána náhodně, takže nevíme zda jejich osvitová jednotka zaručuje slibované rozlišení 3600 DPI. To jen potvrzuje dobrou podmíněnost binární podoby amplitudového hologramu. Zmenšený zdánlivý obraz je dokonce pozorovatelný proti jakémukoliv ostrému bodovému zdroji světla.

6.2.1 Detour-phase

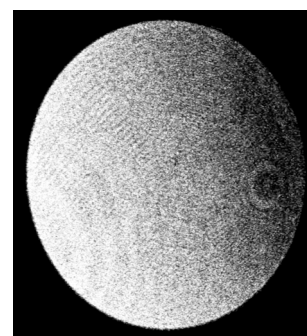
Zdaleka tak dobré výsledky, jako u amplitudového hologramu, jsme nezískali pomocí binarizace metodou detour-phase. Základní problém tkví v silném požadavku na čistotu laseru tak, aby se v požadovaných místech skutečně vyskytlo světlo příslušné fáze. Pokud fázi dodáme do všech míst konstantní, obraz se přesune do strany, protože hologram má charakter optické mřížky. Fáze je při formování obrazu významnější než amplituda, a tak celý obraz bude dost nevýrazný, jak ukazuje numerická simulace tohoto jevu na obrázku 6.24.



Obr. 6.24: Numerická simulace detour-phase hologramu s chybnou (konstantní) fází.



Obr. 6.25: Optická rekonstrukce detour-phase hologramu s chybnou (náhodnou) fází.



Obr. 6.26: Průmět rovnoběžného paprsku, který by měl být úplně čistý.

Obrázek 6.26 jasně ukazuje, že s dostupným vybavením nejsme schopni zajistit čistý průběh fáze napříč plochou hologramu. Fáze je tedy i při kolmém průmětu náhodnou veličinou závislou na prostoru. Pokud tedy do detour-phase hologramu pustíme náhodnou fázi, v místě formování obrazu tak získáme pouze šum (viz obrázek 6.25) a určitých místech se projeví vlastnosti optické mřížky. Z důvodů nesprávného vybavení tedy nemůžeme posoudit zda je metoda detour-phase vhodná pro reprezentaci hologramů v binární podobě.

6.3 Srovnání s metodou detail-driven

Na závěr srovnáme Matsushimův algoritmus s algoritmem detail-driven [Hanak09], jehož autorem jsou Ivo Hanák a Martin Janda. Oba algoritmy mají podobné rysy počínaje využitím rychlé Fourierovy transformace, přes aproximaci osvětlení až po nemožnost zobrazit plošky kolmé na rovinu hologramu.

Matsushima aproximuje vykreslovanou scénu množinou rovinných polygonů, takže prakticky nemění vstupní data. V algoritmu detail-driven je scéna aproximována uniformními ploškami rovnoběžnými s rovinou hologramu, přičemž jejich velikost je volitelná a reprezentuje nejmenší detail povrchu. Z hlediska vjemu by tedy obě reprezentace měly poskytovat stejný výsledek.

Matsushimův algoritmus [Matsushima05] s řešením viditelnosti [Matsushima05b] vyžaduje dvě FFT na plošku, naproti tomu algoritmus detail-driven [Hanak09] díky Fresnelově aproximaci vyžaduje pouze jednu FFT na detail. Uvažme, jak se liší počty plošek a detailů v obou algoritmech. V případě jednoduché scény je plošek velice málo a potřebujeme tak i málo volání FFT. Počet detailů potřebných k aproximaci objektu se odvíjí od rozměru objektu a počtu objektů, které se za sebe řadí. Počet detailů tedy nezávisí na počtu vstupních plošek, avšak

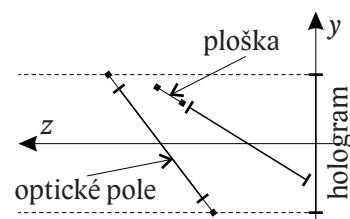
může být velký. Naproti tomu počet vstupních plošek může být neomezeně vysoký a tak Matsushimův algoritmus pro složité scény složené z hodně trojúhelníků selhává, zatímco algoritmus detail-driven má podobnou dobu výpočtu jako pro jednoduchou scénu.

Propagace úhlového spektra, kterou používá Matsushima, sice vyžaduje dvě rychlé Fourierovy transformace, zato je však velice přesná a platí i na malé vzdálenosti. Fresnelova aproximace sice vyžaduje jen jednu transformaci, ale dobrou aproximací je poblíž optické osy, v našem případě tedy až od určité vzdálenosti, která není malá a tím může být v řadě případů limitující.

Detaily aproximující objekt v algoritmu detail-driven jsou rovnoběžné s rovinou hologramu a světlo se z nich šíří přímo na hologram. Šikmé plošky Matsushimova algoritmu mají úplně stejnou vlastnost, protože při rotaci úhlovým spektrem, došlo k posunu ve frekvenční oblasti a tím k přeměrování světla kolmo na hologram. V tomto případě jsou algoritmy totožné.

Článek [Hanak09] nijak explicitně neuvádí, jak zachází s částmi povrchu, které jsou kolmé k rovině hologramu, ale vzhledem principu metody se dá usoudit, že takové plošky nijak nepřispívají do výsledného obrazu, takže je pravděpodobně zanedbává, protože jejich kolmý průmět je vždy menší než detail. Matsushimův algoritmus za předpokladu dostatečně jemného vzorkování umožňuje v omezené míře tyto plošky reprezentovat. Pokud ale zvážíme cílové technologie, vždy bude velikost vzorku výrazně větší než polovina vlnové délky světla, a tudíž nebude možné s přijatelnou ztrátou rotovat úhlovým spektrem o 90° . Takže můžeme říci, že oproti algoritmu detail-driven má Matsushimův algoritmus drobnou výhodu, avšak ta se projeví až v budoucnu, kdy budou dostupnější přesnější technologie výroby hologramů.

Jelikož řez prostorem, ve kterém jsme schopni analyzovat optické pole, je omezen velikostí hologramu, musíme uvážit jistá omezení Matsushimova algoritmu. Pokud je totiž trojúhelník daleko od optické osy a je hodně odkloněn od hologramu, může se stát, že bude ležet mimo námi postihnutelný prostor. Stejně tak pokud je ploška ve své tečném prostoru větší než plocha hologramu, nebude možné jí celou navzorkovat. Náhorně to ukazuje obrázek 6.27. V tomto případě má návrh algoritmus detail-driven, protože ten plošku omezuje pouze jejím kolmým průmětem na hologram. Abychom byli spravedliví, hodí se zmínit, že vždy je možné udělat větší hologram a scénu omezit tak, aby každá její ploška šla navzorkovat.



Obr. 6.27: Plošky přesahující oblast reprezentovatelnou rozměry hologramu.

Algoritmus detail-driven řeší viditelnost na úrovni detailů, takže díky jejich rozměrům se může stát, že detail bude vynechán, ačkoliv by neměl, a naopak. To vnáší chybu nejvýše jednoho detailu podél obvodu tělesa. Jelikož detail je nejmenší rozpoznatelná entita, je tato chyba přijatelná. Vždy lze zvolit menší detail a tak chybu ještě zmenšit. Matsushimův algoritmus řeší viditelnost na úrovni jednotlivých vzorků, takže by teoreticky měl být přesnější. Z fyzikálního hlediska jsou oba přístupy správné, přičemž Matsushima vynucuje řešení viditelnosti pro každou plošku v plném rozsahu, narozdíl od algoritmu detail-driven, kde se viditelnost řeší jednodušším způsobem, a pokud je entita neviditelná, neprobíhá žádný výpočet.

Celým textem se nese varování, že rotace úhlovým spektrem je ztrátová operace. V předchozí sekci bylo patrné, že trojúhelníky, které vstoupily do výpočtu dříve, jsou postupně deformovány, tak jak se při každé rotaci ztrácí část informace. Nejenom, že se ztrácí vysoké frekvence, ale dochází také k postupnému ukrajování hran. V tomto ohledu má Matsushimův algoritmus těžký nedostatek, protože nikdo nechce výsledek, který bude mít díry v místech ke mají být hrany trojúhelníků. Navíc každý trojúhelník kolmý na hologram smaže příspěvky všech předešlých trojúhelníků. Eliminace tohoto jevu je buď nepoužívat rotaci, nebo neřešit viditelnost. První podmínka de facto ruší celý Matsushimův algoritmus, druhá zase principy, kvůli kterým se holografií zabýváme.

S ohledem na poslední vadu, jež není přijatelná, musíme konstatovat, že Matsushimův algoritmus není zdaleka ideální a má před sebou ještě dlouhou cestu.

7 Závěr

V rámci práce byl implementován Matsushimův algoritmus generování hologramů z rovinných plošek s řešením viditelnosti. Jeho funkčnost byla demonstrována jak numerickou simulací, tak výrobou skutečného transmisního hologramu, k jehož přípravě byla vytvořena další aplikace pro binarizaci. Algoritmus tedy funguje a produkuje správné výsledky. Aplikace jsou nezávislé na platformě a pracují v polynomiálním čase.

Studium světla probíhalo především z materiálů, které šíření světla řeší jako postup elektromagnetického vlnění. Bylo nutné prostudovat i něco málo z paprskové optiky. Pro generování digitálních hologramů se v současné době nejvíce používá metoda propagace úhlového spektra, protože na její výpočet lze použít rychlou Fourierovu transformaci.

V současnosti jsou digitální hologramy generované pomocí algoritmů založených na paprskové metodě nebo pomocí algoritmů využívajících propagaci úhlového spektra. Jelikož paprskové metody jsou výpočetně náročné, zvolili jsme pro implementaci Matsushimův algoritmus založený na propagaci úhlového spektra, který nabízí možnost používat šikmé plošky. Zároveň tento algoritmus poskytuje řešení viditelnosti, což je v holografii mnohem složitější problém než v klasické počítačové grafice.

Během implementace algoritmu se vyskytla řada problémů, jejichž řešení je popsáno v kapitole o numerických metodách. Řešení těchto dílčích problémů bylo nutné pro správnou činnost algoritmu, takže po dohodě s vedoucím byl kladen větší důraz na dokončení renderu na úkor vlastní binarizace. Ta však nebyla opomenuta a dvě hlavní metody jsou popsány a vyzkoušeny v textu, a to jak numericky, tak prostřednictvím optiky.

Numerické simulace potvrdily, že binarizace vnáší do rekonstruovaného obrazu určitou chybu, která má povahu šumu a výsledný obraz nijak zvlášť nepoškodí. Výsledky pak potvrdila optická rekonstrukce hologramů vyrobených na film pomocí osvitové jednotky. Ukázalo se, že zvolené metody binarizace stojí na opačných koncích spektra co se týče podmíněnosti.

Metoda prahování funguje prakticky pro jakékoliv světlo, je odolná proti chybě a poskytuje velmi dobré výsledky i při relativně hrubém vzorkování. Naopak metoda *detour-phase* je velice náročná jak na tiskové zařízení, tak na rekonstrukční paprsek, který musí být naprosto čistý. Zejména náročnost rekonstrukce tuto metodu odsouvá do profesionálních optických laboratoří a nejspíše i mimo širší nasazení do praxe. Od zkoumání možností zobrazení hologramů na binárním SLM zařízení bylo upuštěno, protože v současnosti nemáme žádné takové k dispozici.

Matsushimův algoritmus poskytuje sice správné výsledky, avšak jejich kvalita zdaleka není uspokojivá. Během výpočtu dochází k degradaci hran plošek a tak vznikají v objektu díry. Tento problém vychází přímo z koncepce řešení viditelnosti. Zde se ukázalo, že zmíněný algoritmus je teprve v počátcích a jediným přijatelným řešením neuspokojivých výsledků je kompletní přepracování algoritmu pro řešení viditelnosti.

Srovnání Matsushimova algoritmu s algoritmem *detail-driven* ukázalo, že v řadě věcí jsou si podobné, avšak Matsushimův algoritmus má výše zmíněný nedostatek. Jeho řešení by mohlo být dalším směrem kudy vést výzkum.

Zdroje Informací

- [Ahrenberg08] Ahrenberg, Lukas; Benzie, Philip; Magnor, Marcus; Watson John. Computer generated holograms from threedimensional meshes using an analyticlight transport model. In *APPLIED OPTICS*. Joseph N. Mait. Vol. 47 Issue 10. Washington, DC, USA: Optical Society of America, 2008. 1567 - 1574.
- [Brauer91] Bräuer, Ralf; Wyrowski, Frank; Bryngdahl, Olof. Diffusers in digital holography. In *Journal of the Optical Society of America A*. Franco Gori. Vol. 8, Issue 3. Washington, DC, USA: Optical Society of America, 1991. 572-578.
- [Feynman00] Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B.; Sands, Mathew. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady*. 1. české vydání. Havlíčkův Brod: Fragment. 2000. ISBN 80-7200-405-0.
- [FFTW10] Frigo, Matteo; Johnson, Steven G.. *Fastest Fourier Transform in the West*. [Dynamicky linkované knihovny] Ver. 3.2.2. USA, 2010. Sada platformě nezávislých knihoven pro výpočet rychlé Fourierovy transformace. Dostupné na <<http://www.fftw.org/>>
- [Gabor71] Dennis Gabor. *Autobiography* [online/HTML]. 2010. [citováno dne 4. května 2010]. <http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1971/gabor-autobio.html>.
- [Goodman05] Goodman, Joseph W.. *Introduction to Fourier Optics*. Third Edition, Hardcover. Greenwood Village, Colorado: Roberts & Company Publisher. 2005. ISBN 0-9747077-2-4.
- [Hanak09] Hanák, Ivo; Janda, Martin; Skala, Václav. Detail-driven digital hologram generation. In *The Visual Computer*. Nadia Magnenat-Thalmann. Volume 26, Number 2 / February, 2010. Berlin / Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg, 2009. 83-96.
- [Hariharan02] Hariharan, P. *BASICS OF HOLOGRAPHY*. eBook (EBL). Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2002. ISBN 978-0-511-07643-5.
- [HoloKit08] Hanák, Ivo; Janda, Martin; Bařtipán, Jan. *Holography Toolkit*. [Sada programů] Ver. 1.0. Plzeň, 2008. Sada nástrojů pro generování hologramů.. Dostupné na <<http://herakles.zcu.cz/>, <http://holo.zcu.cz/>, <http://graphics.zcu.cz/>>
- [Howell01] Howell, Kenneth B.. *Principles of Fourier Analysis*. illustrated. USA: CRC Press. 2001. ISBN 0849382750.
- [Janda07] Janda, Martin. *Digital Hologram Synthesis – State of the art and a concept of doctoral thesis*. Plzeň, 2007. Koncept disertační práce. Vedoucí práce Skala, Václav; Hanák, Ivo.
- [LED95] *A Guide to Human Visual Perception and the Optical Characteristics of LED Displays*. USA: Hewlett-Packard Co., 1995. 18 str. ISBN 5963-7073E
- [Mathworld10] Weisstein, Eric W.. "Discrete Fourier Transform." *From MathWorld--A Wolfram Web Resource*. [online/HTML]. Last updated: Fri Apr 30 2010. [citováno dne 10. května 2010]. <<http://mathworld.wolfram.com/DiscreteFourierTransform.html>>.

- [Matsushima03] Matsushima, Kyoji. Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves. In *Journal of the Optical Society of America A*. Franco Gori. Vol. 20, Issue 9. Washington, DC: Journal of the Optical Society of America, 2003. 1755-1762.
- [Matsushima05] Matsushima, Kyoji. Computer-generated holograms for three-dimensional surface objects with shade and texture. In *Applied Optics*. Mait, Joseph N.. Vol. 44, Issue 22. Washington: Optical Society of America, 2005. 4607 - 4614.
- [Matsushima05b] Matsushima, Kyoji. Exact hidden-surface removal in digitally synthetic full-parallax holograms. In *SPIE Proc. Practical Holography XIX: Materials and Applications*. Tung H. Jeong, Hans I. Bjelkhagen. SPIE#5742, San Jose, California, San Jose, CA, USA: SPIE Proc., 2005. 25-32.
- [Matsushima10] Matsushima, Kyoji; Nakahara, Sumio. Extremely high-definition full-parallax computer-generated hologram created by the polygon-based method. In *APPLIED OPTICS*. Joseph N. Mait. Vol. 48, No. 34. Washington, DC, USA: Optical Society of America, 2010. pp. H54-H63.
- [Nave97] Nave, C. R.. *Light and Vision* [online/HTML]. 6. září 1997. [citováno dne 9. května 2010]. <<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/ligcon.html>>.
- [Phong75] Phong, Bui Tuong. Illumination for computer generated pictures. In *Communications of the ACM*. Volume 18, Issue 6. New York, NY, USA: ACM, 1975. 311-317.
- [Rusnak05] Rusňák, Karel. *Elektromagnetické pole (přednáška)* [online/PDF]. 11/05. [citováno dne 20. dubna 2010]. <<http://kfy.zcu.cz/Rusnak/otazky/elmg.pole/elmg.pole.pdf>>.
- [Rusnak06] Rusňák, Karel. *Elektromagnetické vlnění* [online/PDF]. 27.1.06. [citováno dne 21. dubna 2010]. <<http://kfy.zcu.cz/Rusnak/otazky/elmg.vln/elmg.vln.pdf>>.
- [Rusnak07] Rusňák, Karel. *Interference více vlnění* [online/PDF]. rev. a doplň. 11/07. [citováno dne 26. dubna 2010]. <<http://kfy.zcu.cz/Rusnak/otazky/inter.vice.vln/inter.vice.vln.pdf>>.
- [Smith97] Smith, Steven W., Ph.D.. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing* by Steven W. Smith. Hard Cover. San Diego, California: California Technical Publishing. 1997. ISBN 0-9660176-3-3.
- [Torrance67] TORRANCE, K. E.; SPARROW, E. M.. Theory for Off-Specular Reflection From Roughened Surfaces. In *Journal of the Optical Society of America*. Vol. 57, Issue 9. USA: The Optical Society of America, 1967. 1105-1112.

Příloha

Příloha obsahuje návod na použití programu, jeho přeložení a další výsledky, které nebyly uvedeny v hlavním textu.

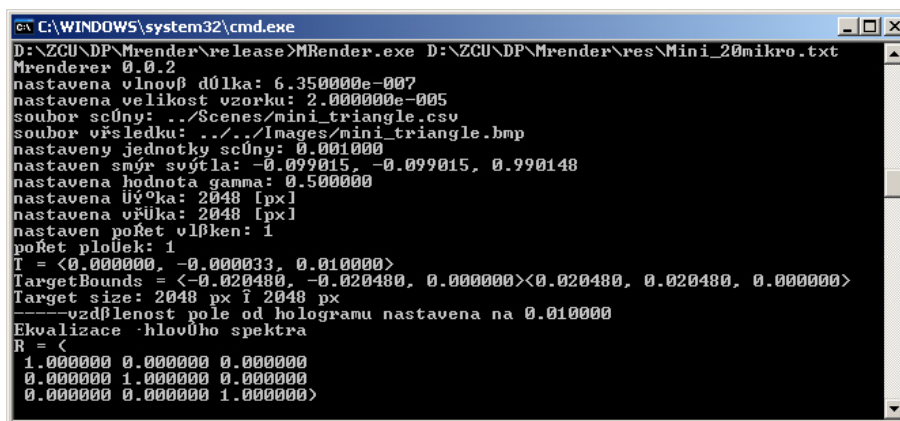
A Uživatelská příručka

Všechny programy jsou koncipovány jako řádkové aplikace, takže nemají žádné grafické rozhraní. Veškeré parametry jsou předávány jako argument příkazové řádky případně jsou uloženy v textovém souboru.

A.1 Program Mrender

Hlavní program nazvaný Mrender používá jako vstup parametrů textový soubor s parametry. V průběhu výpočtu průběžně vypisuje informace o krocích, které provádí, aby bylo možné posoudit v jaké fázi se výpočet nachází.

Pro spuštění stačí otevřít systémovou konzoli zadat adresu k programu Mrender (Mrender.exe ve Windows, Mrender v ostatních systémech) a jako argument zadat cestu ke konfiguračnímu souboru



```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
D:\ZCU\DP\Mrender\release\MRender.exe D:\ZCU\DP\Mrender\res\Mini_20mikro.txt
Mrenderver 0.0.2
nastavena vlnová délka: 6.350000e-007
nastavena velikost vzorku: 2.000000e-005
soubor scény: ../Scenes/mini_triangle.csv
soubor výsledku: ../Images/mini_triangle.bmp
nastaveny jednotky scény: 0.001000
nastaven směr světla: -0.099015, -0.099015, 0.990148
nastavena hodnota gamma: 0.500000
nastavena šířka: 2048 [px]
nastavena výška: 2048 [px]
nastaven počet vlnken: 1
počet plošek: 1
T = <0.000000, -0.000033, 0.010000>
Target Bounds = <-0.020480, -0.020480, 0.000000><0.020480, 0.020480, 0.000000>
Target size: 2048 px i 2048 px
----- vzdálenost pole od hologramu nastavena na 0.010000
Ekvalizace hloubového spektra
R = <
1.000000 0.000000 0.000000
0.000000 1.000000 0.000000
0.000000 0.000000 1.000000>

```

Obr. 7.1: Příklad spuštění a začátek běhu programu Mrender.

Prozatím je podpora více vláken pouze u Fourierovy transformace takže urychlení na více procesorovém stroji není tak markantní. Nejvíce času ze všech kroků zabírá rotace. Nároky na paměť jsou úměrné rozměru optického pole, které chceme vypočítat. Program potřebuje mít optické pole reprezentované jako tabulku komplexních čísel ve formátu IEEE754 double, což znamená 16 bajtů na element. Navíc tuto tabulku potřebuje dvakrát takže hlavní paměťové nároky jsou $32 * M * N$ bajtů pro výpočet optického pole o $M \times N$ elementech.

A.1.1 Konfigurační soubor

Konfigurační soubor aplikace Mrender je textový, aby byl snadno čitelný a editovatelný. Jeho formát je název: hodnota. Jednotlivé položky se mohou vyskytovat v libovolném pořadí a nemusí být explicitně uvedeny, protože program má pro tento případ nastavené implicitní hodnoty.

- wavelength: 635e-9 – vlnová délka světla uváděná v metrech
- samplePeriod: 2e-6 – velikost vzorku zadávaná v metrech
- sceneFileName: scene.csv – cesta k souboru s popisem scény, která se má renderovat

- `outputFileName: output.df` – cesta k výstupnímu souboru, ve formátu podle přípony (df, bmp, raw)
- `sceneUnits: 1` – jednotky, ve kterých je scéna zadána, implicitně 1 [m / m], např. 1e-3 [m / m] = milimetr
- `lightDirection: -1; -1; 10` – směr světla ve scéně $x; y; z$
- `gamma: 0.5` – koeficient kompenzace osvětlení, který ve svém osvětlovacím modelu uvádí Matsushima.
- `width: 2048` – počet vzorků na šířku optického pole
- `height: 2048` – počet vzorků na výšku optického pole
- `threadCount: 1` – počet vláken, která mají počítat Fourierovu transformaci

Cesty k souborům jsou absolutní, nebo relativní vzhledem k místu, kde byl program Mrender spuštěn.

A.1.2 Vstupní formát CSV

Jelikož důraz byl kladen především na samotný výpočet, byl pro vstup zvolen pouze vlastní formát zadávání scény. Podobně jako aplikace Holography toolkit vyžadují předzpracovaný soubor, tak i naše aplikace vyžaduje soubor, který obsahuje seřazenou posloupnost neprotínajících se trojúhelníků. To znamená že první trojúhelník se vykreslí první, druhý hned po něm a tak dál. V případě neseřazených trojúhelníků bude mít výsledek špatně řešenou viditelnost.

Každý řádek vstupního souboru obsahuje jeden trojúhelník v podobě 9 souřadnic oddělených středníkem s desetinou tečkou. Je možné používat i semilogaritmický tvar jako například $-5.2e-4$. Řádek tedy obsahuje $A_x; A_y; A_z; B_x; B_y; B_z; C_x; C_y; C_z$. Řádek může být oddělen jak pomocí CRLF, tak pomocí LF. Názorně to ukazuje výpis souboru `lotos.csv`.

```
0; 13,408;800; -3.499;2.381;800; 3.769;2.381;800
-3.499;2.381;800; -11.232;-6.280;800; 0.135;-3.941;800
0.135;-3.941;800; 11.502; -6.280; 800; 3.769;2.381;800
0.156;6.214;780; -10.449;6.543;774; -4.862;-2.476;780
-4.862;-2.476;780; 0.156;-11.825;774; 5.173;-2.476;780
5.173;-2.476;780; 10.761;6.543;774; 0.156;6.214;780
```

Kód 7.1: Výpis souboru `lotos.csv`

Jelikož soubor neumožňuje zapsat směr světla, musí být zadán v konfiguračním souboru programu Mrender.

A.2 Konverzní aplikace

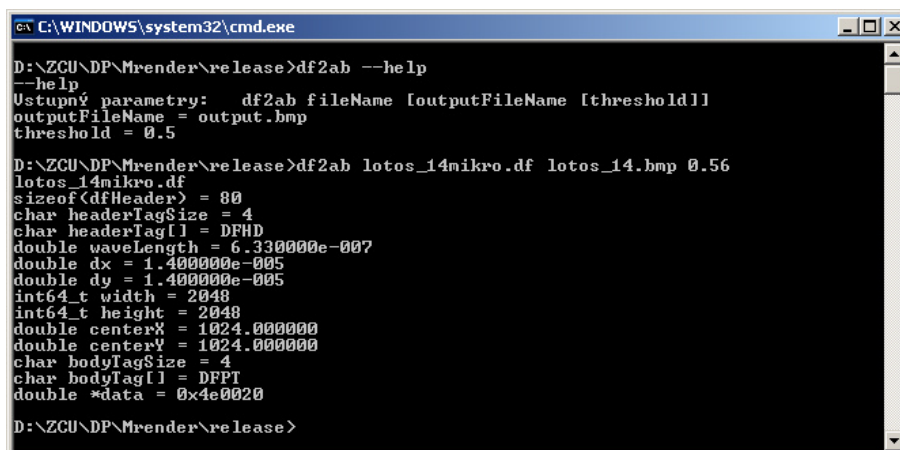
Tyto programy byly vytvořeny jako samostatné celky, protože výstup z programu Mrender je většinou potřeba ještě zkontrolovat pomocí propagátoru z balíku Holography toolkit. Navíc bylo potřeba převádět i optická pole ze zmíněného toolkitu.

Spouštění opět probíhá pomocí příkazové řádky. Tentokrát je část parametrů pevně spjata s optickým polem v souboru DF, a tak zbývá jen několik málo parametrů, které je potřeba předat. Proto konverzní aplikace přijímají parametry jako argument příkazové řádky.

A.2.1 Aplikace `df2ab`

Tento program převádí soubory DF na amplitudový binární hologram tak, že nalezne maximální amplitudu, podle ní přidá referenční vlnu, jejíž úhel je závislý na vzorkovací frekvenci a po jejím přidání podle nové maximální amplitudy provede prahování podle zadaného parametru.

Parametry příkazové řádky jsou: cesta ke vstupnímu souboru, cesta k výstupnímu souboru, není-li zadána použije se soubor output.bmp a práh z intervalu $<0, 1>$, který je implicitně 0,5. Výstupem je windows BMP s jedním bajtem na vzorek, přičemž výstupní soubor obsahuje pouze hodnoty 0 a 255.



```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
D:\ZCU\DP\Mrender\release>df2ab --help
--help
Ustupný parametry: df2ab fileName [outputFileName [threshold]]
outputFileName = output.bmp
threshold = 0.5

D:\ZCU\DP\Mrender\release>df2ab lotos_14mikro.df lotos_14.bmp 0.56
lotos_14mikro.df
sizeof(dfHeader) = 80
char headerTagSize = 4
char headerTag[] = DFHD
double wavelength = 6.330000e-007
double dx = 1.400000e-005
double dy = 1.400000e-005
int64_t width = 2048
int64_t height = 2048
double centerX = 1024.000000
double centerY = 1024.000000
char bodyTagSize = 4
char bodyTag[] = DFPT
double *data = 0x4e0020

D:\ZCU\DP\Mrender\release>

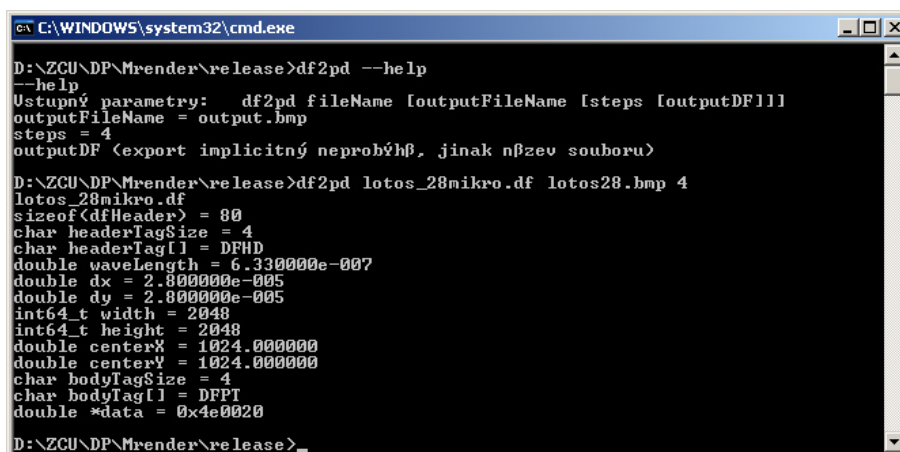
```

Obr. 7.2: Spuštění a běh programu df2ab.

Program lze spustit s prvním parametrem `--help` a zobrazí se nápověda ke vstupním parametrům.

A.2.2 Aplikace df2pd

Jde o program, který soubor DF převádí na windows BMP, kde je pomocí hodnot 0 a 255 reprezentováno optické pole metodou detour-phase. Jako vstupní parametry požaduje cestu k vstupnímu souboru DF, cestu k výstupní bitmapě, počet kroků, kterými reprezentovat fázi a amplitudu a případně cestu k souboru DF určenému k numerické simulaci zobrazení. Pokud poslední argument není uveden, simulační DF soubor se nebude ukládat. Simulační DF soubor obsahuje převážně nulové elementy a na místech, kde výstupní bitmapa má bílou je uložena fáze s jednotkovou amplitudou. Simulační soubor je pouze pro ověření a nemá další význam.



```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
D:\ZCU\DP\Mrender\release>df2pd --help
--help
Ustupný parametry: df2pd fileName [outputFileName [steps [outputDF]]]
outputFileName = output.bmp
steps = 4
outputDF (export implicitný neprobíh, jinak nřzev souboru)

D:\ZCU\DP\Mrender\release>df2pd lotos_28mikro.df lotos28.bmp 4
lotos_28mikro.df
sizeof(dfHeader) = 80
char headerTagSize = 4
char headerTag[] = DFHD
double wavelength = 6.330000e-007
double dx = 2.800000e-005
double dy = 2.800000e-005
int64_t width = 2048
int64_t height = 2048
double centerX = 1024.000000
double centerY = 1024.000000
char bodyTagSize = 4
char bodyTag[] = DFPT
double *data = 0x4e0020

D:\ZCU\DP\Mrender\release>

```

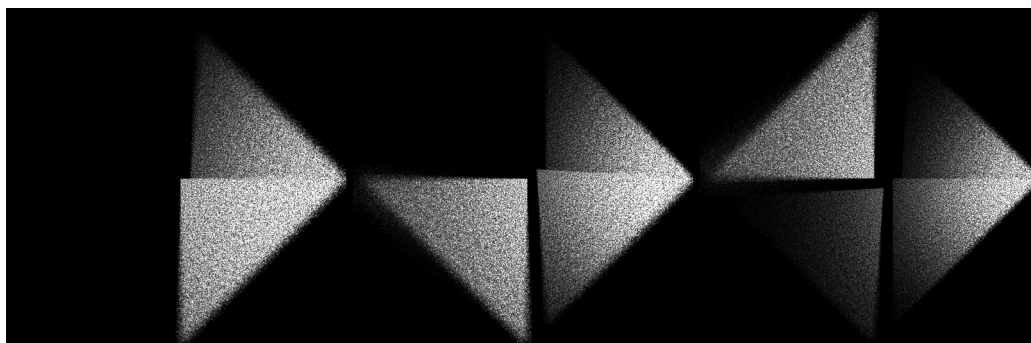
Obr. 7.3: Spouštění a běh aplikace df2pd.

B Překlad

Pro překlad je připraven soubor `makefile`, kde jsou veškeré náležitosti připraveny. Výsledné spustitelné soubory se vytvoří v adresáři `release` a jsou k nim nakopírovány potřebné knihovny z adresáře `lib`. Pro překlad na systému Windows je potřeba překladač GCC a stačí zadat příkaz `make` a dojde k překladu všech aplikací a nakopírování knihoven. Na systému linux

je potřeba programu make ještě zadat argument `linux: make linux`. Pro linux se implicitně kopírují 64bitové knihovny. Pokud překládáte na 32bitovém Linuxu, musíte ještě přikopírovat 32bit FFTW knihovny.

C Další výsledky

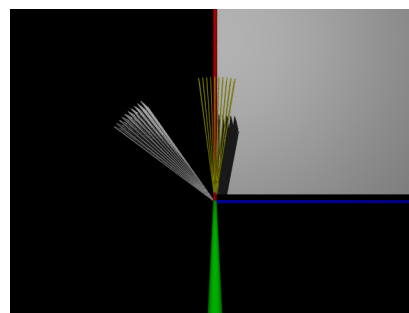


Obr. 7.4: Postupná degradace plošek s přibývajícími novými ploškami.

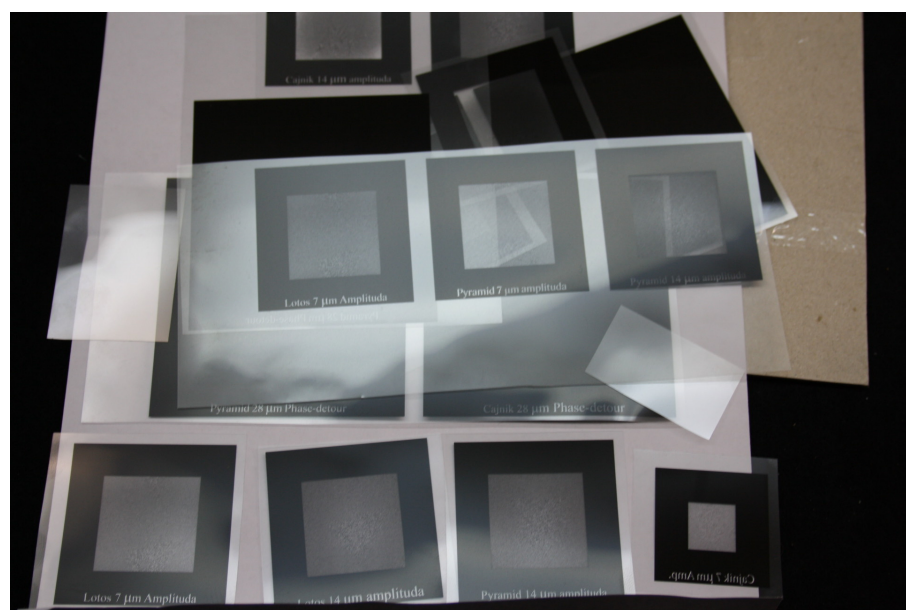
Některé výsledky, které nebyly uvedeny v sekci získané výsledky, protože přímo nesouvisely se zadáním, jsou uvedeny zde. Jejich zhlédnutí může pomoci k pochopení některých principů.

Obrázek vpravo ukazuje skutečný případ rotace úhlovým spektrem, je přímo vidět, že veškeré hodnoty by měli být vzorkovány mimo známý rozsah.

Dolní obrázek ukazuje jak vypadá takový hologram fyzicky, když přijde z tiskárny.



Obr. 7.5: Rotace úhlovým spektrem o 45° při vzorkování 2 mikrometry.



Obr. 7.6: Hologramy vyhotovené osvitovou jednotkou na film.