

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra informatiky a výpočetní techniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

# Hledání tras podle zadaného terénního profilu

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 9. května 2011

Vladislav Razým

### **Abstract**

The theme of this work is searching of tracks in any area on Earth which terrain (elevation) profile is as similar as possible to the given terrain profile. To solve this problem it is necessary to have as accurate as possible description of a terrain surface and fast and accurate search algorithm. The description of a terrain surface can be obtained for the most of the Earth's surface but the search algorithm has not yet been published probably. There are described two procedures of track searching. The first do not take roads into account during searching and the second searching tracks leading only on roads.

The final product could be particularly useful in the planning of special training for top athletes especially cross country skiers, runners or cyclists.

### **Poděkování**

Rád bych poděkoval Prof. Dr. Ing. Ivaně Kolingerové za odborné a ochotné vedení bakalářské práce a Ing. Karlu Jedličkovi, Ph.D. za poskytnutí cenných informací z oboru geografických informačních systémů. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za podporu v průběhu studia.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Popis tvaru terénního reliéfu</b>	<b>2</b>
2.1	Reprezentace rastrového DMR . . . . .	2
2.2	Interpolace rastrového DMR . . . . .	3
2.2.1	Interpolace nejbližším sousedem . . . . .	5
2.2.2	Bilineární interpolace . . . . .	5
2.2.3	Bikubická interpolace . . . . .	6
2.3	Mapování DMR na zeměpisné souřadnice . . . . .	8
2.4	Aproximace planety Země . . . . .	9
2.5	SRTM DEM . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Algoritmy hledání tras</b>	<b>12</b>
3.1	Obecný algoritmus hledání tras . . . . .	13
3.2	Algoritmus hledání tras po cestách . . . . .	17
3.3	Shrnutí algoritmů hledání . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Implementace</b>	<b>22</b>
4.1	Ovládání programu . . . . .	23
4.2	Vizualizace nalezených tras . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Testování a výsledky</b>	<b>24</b>
5.1	Oblast Český les . . . . .	24
5.2	Oblast Holmenkollen . . . . .	25
5.3	Oblast Krkavec a okolí . . . . .	26
5.4	Shrnutí testování . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>Obrazová příloha</b>	<b>30</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce si klade za cíl vytvořit a implementovat algoritmus hledání tras ve vybrané oblasti na Zemi, jejichž terénní (výškový) profil je co nejvíce podobný zadanému profilu. Aby bylo možné takové trasy hledat, je potřeba mít nejen co nejpřesnější popis tvaru terénního reliéfu oblasti, ve které budou trasy hledány, ale i rychlý a přesný algoritmus vlastního hledání. Zatímco popis tvaru terénního reliéfu je možné získat prakticky pro celý povrch planety Země, samotný algoritmus hledání tras nebyl s velkou pravděpodobností dosud zveřejněn [1].

V této práci se nejprve zmíním o digitálních modelech reliéfu (DMR), které popisují tvar terénního reliéfu, o jejich typech, intepolačních metodách a vhodných zdrojích pro účely této úlohy. Dále budou popsány dva algoritmy hledání tras. Prvně popsáný algoritmus bere při hledání v úvahu pouze tvar terénního reliéfu, nezabývá se však tím, jak vypadá zemský povrch. Nerozlišuje tedy, zda nalezená trasa vede zástavbou, lesem, přes pole, řeky, dálnice atp. Druhý algoritmus hledá trasy vedoucí pouze po cestách, popřípadě silnicích. Společně s popisem tvaru terénního reliéfu je pro druhý algoritmus nutný také popis cest (mapa) vybrané oblasti. Popsán bude také proces testování obou algoritmů na reálných datech.

Cílová aplikace by mohla být využita zejména při plánování tréninků vrcholových sportovců (běh na lyžích, běh, cyklistika). Bude-li dopředu znám profil závodní trati pro sportovce významného závodu, pak bude možné nalézt trasy s podobným profilem například v okolí sportovcova bydliště. Ten si pak o závodní trati bude schopen udělat názornou představu nebo na nalezené trase trénovat, a tím zkvalitnit přípravu na konkrétní závod.

## Kapitola 2

# Popis tvaru terénního reliéfu

K popisu tvaru terénního reliéfu se nejčastěji využívá digitální model reliéfu<sup>1</sup> (DMR). Ten bývá nejčastěji popsán nespojitou funkcí dvou proměnných  $z = f(x, y)$ , která každému bodu  $[x, y]$  z definičního oboru přiřazuje právě jednu hodnotu představující výšku terénního reliéfu nad základní úrovní. Tímto vyjádřením však není možné popsat plně trojrozměrné objekty jako např. převisy nebo jeskyně, a proto takto definovaná data nazýváme jako 2.5 rozměrná (2.5D) [2, 3]. Z hlediska struktury dat nejčastěji dělíme DMR na dvě hlavní skupiny:

**Rastr** DMR je reprezentován maticí výškových bodů s pravidelným vzorkováním. Interval mezi vzorky se běžně vztahuje k určitému geografickému souřadnicovému systému, např. zeměpisná šířka-délka. Nevýhody této struktury jsou mnohdy vysoká datová redundance a vlivem vzorkování jistá nepřesnost dat. Velká výhoda je však v jednoduchosti a rychlosti algoritmů prováděných nad rastrem. O přesnosti rastrového DMR rozhoduje několik faktorů. Mezi ty nejdůležitější patří způsob pořízení výškových dat, horizontální rozlišení (vzdálenost mezi výškovými body) a tvar terénního reliéfu, který DMR popisuje. Běžné využití rastrového DMR je např. zjišťování terénních parametrů, modelování záplav a sesuvů půdy, 3D vizualizace terénu (např. letecké simulátory, hry) a jiné [3].

**TIN** (Triangulated Irregular Network) DMR je reprezentován nepravidelnou trojúhelníkovou sítí, která je vytvořena z nepravidelně rozmístěných výškových bodů. TIN reprezentuje terén velice přesně s minimální redundancí dat, jeho nevýhodou je však poměrně složitá algoritmizace operací nad touto datovou strukturou. TIN je využíván v případech, kdy je třeba mít co možná nejpresnější model reliéfu, např. tedy při hledání vrstevnic [3].

V další části práce se budeme zabývat pouze rastrovým DMR, a to zejména z důvodu globální dostupnosti a výše zmíněných výhod tohoto typu DMR.

### 2.1 Reprezentace rastrového DMR

Rastrový DMR je matice  $\mathbf{H} = [h_{ij}]$  typu  $m \times n$ , kde  $m$  je počet řádků a  $n$  počet sloupců této matice, hodnota prvku  $h_{ij}$  reprezentuje výšku terénního reliéfu nad

---

<sup>1</sup>anglický ekvivalent je Digital Terrain Model (DTM) nebo také Digital Elevation Model (DEM)

základní úrovní na pozici  $(i, j)$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix} = [h_{ij}]$$

Funkcí dvou proměnných  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , pro niž platí

$$h(j-1, m-i) = h_{ij} \quad \forall h_{ij} \in \mathbf{H}, \quad (2.1)$$

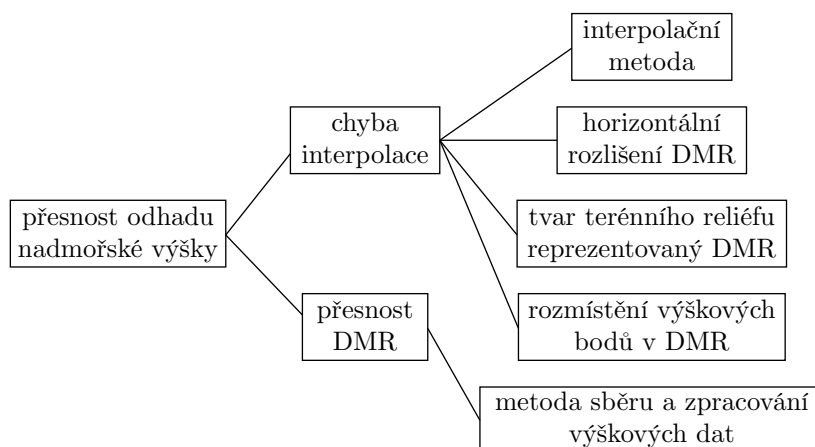
reprezentujeme rastrový DMR v kartézské soustavě souřadnic (funkci  $h$  si lze představit, jako bychom položili matici  $\mathbf{H}$  do počátku kartézské soustavy souřadnic, takže  $h(0,0) = h_{m1}$ ,  $h(1,0) = h_{m2}$  atd.). Z definice této funkce plyne, že není spojitá a že všechny body, které jsou prvky definičního oboru, mají celočíselné souřadnice. Elementární oblast

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq n-1, 0 \leq y \leq m-1\} \quad (2.2)$$

je nejmenší možná čtyřúhelníková oblast, které náleží všechny body definičního oboru funkce  $h$ .

## 2.2 Interpolace rastrového DMR

Jak bylo zmíněno výše, DMR obsahuje výšková data jen pro určité body zemského povrchu. Výšku v libovolném bodě je nutno odhadnout pomocí vhodné interpolační metody, o jejíž vhodnosti v zásadě rozhoduje přesnost odhadnuté hodnoty (viz obr. 2.1) a hladkost výsledného terénního reliéfu.



Obrázek 2.1: Faktory ovlivňující přesnost odhadu nadmořské výšky z DMR.

O hladkosti výsledného terénního reliéfu rozhoduje řád interpolačního polynomu. Výsledkem nejjednodušší metody, tj. interpolace nejbližším sousedem, je nespojitý terénní reliéf, složitější metody pak mohou zaručit spojitost nejen terénního reliéfu,



ale i (nahlížíme-li na terénní reliéf jako na funkci) jeho derivací. V případě spojitosti derivace bude výsledný terénní reliéf hladký.

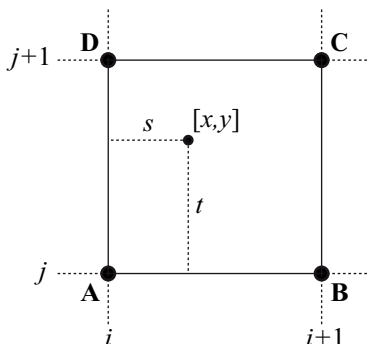
Hodnotu funkce  $h$  (viz rovnice (2.1)) v bodě  $[x, y] \in \Omega$  (viz rovnice (2.2)) určíme interpolací, pro jejíž účely dále definujeme body

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [i, j] = [[x], [y]], \\ \mathbf{B} &= [i + 1, j], \\ \mathbf{C} &= [i + 1, j + 1], \\ \mathbf{D} &= [i, j + 1].\end{aligned}$$

Bod  $\mathbf{A} = [i, j]$  má tedy celočíselné souřadnice, které byly získány zaokrouhlením souřadnic bodu  $[x, y]$  směrem dolů. Proto platí, že body  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{D}(h)$ , což vyplývá z definice (2.1) funkce  $h$ , a že jsou nejbližší zadanému bodu  $[x, y]$  a tvoří jednotkový čtverec (buňku)  $\square ABCD$ . Dále

$$\begin{aligned}s &= x - i, \\ t &= y - j,\end{aligned}\tag{2.3}$$

kde  $s \in \langle 0, 1 \rangle$  a  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  jsou parametry, které definují vzdálenosti bodu  $[x, y]$  od bodu  $\mathbf{A}$  ve směru souřadnicových os.



Obrázek 2.2: Jednotkový čtverec (buňka)  $\square ABCD$ .

K interpolaci 2D dat uspořádaných v pravidelné jednotkové mřížce lze použít interpolační polynom ve tvaru

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad x, y \in \langle 0, 1 \rangle,\tag{2.4}$$

kde hodnoty  $x, y$  představují vzdálenost ve směru souřadnicových os od nejbližšího levého dolního bodu mřížky,  $a_{ij}$  jsou koeficienty interpolačního polynomu a  $m, n$  jsou stupně interpolačního polynomu ve směru souřadnicových os. Neznámé koeficienty  $a_{ij}$  musí být určeny pouze pomocí bodů jednotkové mřížky, ve kterých je známa jejich hodnota. Přesnost interpolační metody pak závisí nejen na tvaru interpolačního polynomu, ale i na způsobu určení jeho neznámých koeficientů  $a_{ij}$ . Způsobů, jak tyto koeficienty určit, existuje celá řada.

Protože definiční obor funkce  $h$  tvoří pravidelnou jednotkovou mřížku, můžeme hodnotu funkce  $h$  v bodě  $[x, y] \in \Omega$  odhadnout pomocí interpolačního polynomu (2.4). Pak pro funkci  $h$  platí

$$h(x, y) = p(s, t), \quad (2.5)$$

kde  $s, t$  jsou parametry spočítané dle vztahu (2.3), a  $p$  je interpolační polynom definovaný vztahem (2.4).

### 2.2.1 Interpolace nejbližším sousedem

Hodnotu funkce  $h$  v bodě  $\mathbf{Q} = [x, y] \in \Omega$  určíme interpolačním polynomem ve tvaru

$$h(\mathbf{Q}) = a_{00},$$

kde  $a_{00}$  je výška v nejbližším bodě, který je prvkem DMR, proto

$$a_{00} = \begin{cases} h(\mathbf{A}) & s \leq 0,5 \wedge t \leq 0,5 \\ h(\mathbf{B}) & s > 0,5 \wedge t \leq 0,5, \\ h(\mathbf{C}) & s > 0,5 \wedge t > 0,5, \\ h(\mathbf{D}) & s \leq 0,5 \wedge t > 0,5. \end{cases}$$

Metoda může být modifikována tak, že hodnotu  $a_{00}$  odhadneme aritmetickým průměrem hodnot v bodech tvořících  $\square ABCD$ , pak

$$a_{00} = \frac{1}{4}(h(\mathbf{A}) + h(\mathbf{B}) + h(\mathbf{C}) + h(\mathbf{D})).$$

Tato metoda je nejjednodušší možná a zároveň nejméně přesná. Jejím výsledkem je nespojitá reprezentace terénního reliéfu (viz obr. A.1 strana 30).

### 2.2.2 Bilineární interpolace

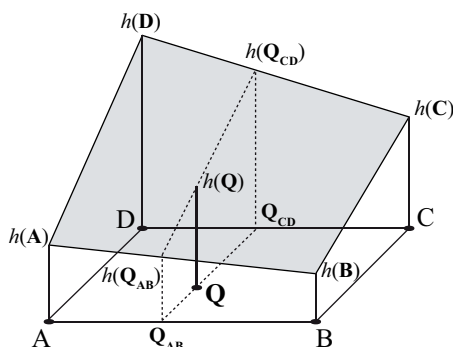
Bilineární interpolace je rozšíření 1D lineární interpolace na interpolaci pro 2D uspořádaná data. Princip odhadu neznámé hodnoty funkce  $h$  v bodě  $\mathbf{Q} = [x, y] \in \Omega$ , spočívá v tom, že nejprve z hodnot  $h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})$  zjistíme lineární interpolací hodnotu v bodě  $\mathbf{Q}_{AB} = [x, j]$ , poté z hodnot  $h(\mathbf{C}), h(\mathbf{D})$  zjistíme lineární interpolací hodnotu v bodě  $\mathbf{Q}_{CD} = [x, j + 1]$  a nakonec z hodnot  $h(\mathbf{Q}_{AB}), h(\mathbf{Q}_{CD})$  určíme lineární interpolací hodnotu v bodě  $\mathbf{Q}$  [2].

Obvykle určíme hodnotu funkce  $h$  v bodě  $\mathbf{Q} = [x, y] \in \Omega$  interpolačním polynomem ve tvaru

$$h(\mathbf{Q}) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{ij} s^i t^j = a_{00} + a_{10}s + a_{01}t + a_{11}st. \quad (2.6)$$

K určení všech čtyř koeficientů  $a_{ij}$  musíme sestavit soustavu čtyř rovnic, kterou vytvoříme dosazením hodnoty každého ze čtyř bodů tvořících  $\square ABCD$  do vztahu (2.6). Vyřešením této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} a_{00} &= h(\mathbf{A}), \\ a_{10} &= h(\mathbf{B}) - h(\mathbf{A}), \\ a_{01} &= h(\mathbf{D}) - h(\mathbf{A}), \\ a_{11} &= h(\mathbf{A}) - h(\mathbf{B}) - h(\mathbf{D}) + h(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

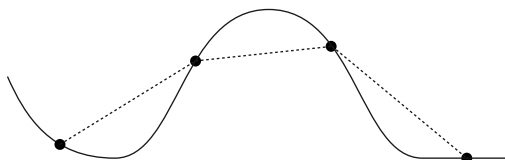


Obrázek 2.3: Bilineární interpolace.

Výsledkem této metody je spojitý terénní reliéf, který se stane po částech lomenou plochou [2] (viz obr. A.1 strana 30).

Bilineární interpolace má však tendenci zplošťovat terénní reliéf. Uvažme, že by přibližně uprostřed  $\square ABCD$  ležel vrchol kopce. Pak všechny hodnoty v okolních bodech **A**, **B**, **C**, **D** budou menší, a tak bilineární interpolací odhadneme menší hodnotu, než je skutečná výška tohoto kopce. Podobně, kdybychom místo kopce uvažovali údolí, odhadneme větší hodnotu, než je skutečná výška v tomto údolí. Zplošťování terénního reliéfu tedy spočívá ve zmenšování kopců a vyvyšování údolí (viz obr 2.4).

Pro snížení efektu zplošťování terénního reliéfu je nutné použít interpolační metody vyšších řádů, které pro odhad hodnoty používají více než čtyři okolní body DMR.



Obrázek 2.4: Efekt zplošťování terénního reliéfu bilineární interpolací (jednorozměrné zobecnění). (—) Skutečný terénní reliéf, (- - -) terénní reliéf získaný bilineární interpolací, (•) výškové body v DMR. Nevhodné rozmístění výškových bodů v DMR vzhledem k tvaru okolního terénního reliéfu může vést k velké chybě interpolace.

### 2.2.3 Bikubická interpolace

Hodnotu funkce  $h$  v bodě  $\mathbf{Q} = [x, y] \in \Omega$  určíme interpolačním polynomem ve tvaru

$$h(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} s^i t^j, \quad (2.7)$$

jehož parciální derivace ve směru souřadnicových os jsou

$$h_x(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 i a_{ij} s^{i-1} t^j, \quad (2.8)$$

$$h_y(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 j a_{ij} s^i t^{j-1} \quad (2.9)$$

a jehož smíšená derivace je

$$h_{xy}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 ij a_{ij} s^{i-1} t^{j-1}. \quad (2.10)$$

K určení všech šestnácti koeficientů  $a_{ij}$   $\{i, j = 0, 1, 2, 3\}$  interpolačního polynomu musíme sestavit soustavu šestnácti rovnic, kterou obvykle vytvoříme dosazením

- funkčních hodnot  $h(\mathbf{A})$ ,  $h(\mathbf{B})$ ,  $h(\mathbf{C})$ ,  $h(\mathbf{D})$  do (2.7),
- hodnot parciálních derivací  $h_x(\mathbf{A})$ ,  $h_x(\mathbf{B})$ ,  $h_x(\mathbf{C})$ ,  $h_x(\mathbf{D})$  do (2.8),
- hodnot parciálních derivací  $h_y(\mathbf{A})$ ,  $h_y(\mathbf{B})$ ,  $h_y(\mathbf{C})$ ,  $h_y(\mathbf{D})$  do (2.9),
- hodnot smíšených derivací  $h_{xy}(\mathbf{A})$ ,  $h_{xy}(\mathbf{B})$ ,  $h_{xy}(\mathbf{C})$ ,  $h_{xy}(\mathbf{D})$  do (2.10).

Řešení výsledné soustavy rovnic pak může být dle [4] zapsáno v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{20} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{30} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & 9 & -9 & 6 & 3 & -3 & -6 & 6 & -6 & -3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & -6 & 6 & -4 & -2 & 2 & 4 & -3 & 3 & 3 & -3 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 6 & -3 & -3 & 3 & 3 & -4 & 4 & 2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(\mathbf{A}) \\ h(\mathbf{B}) \\ h(\mathbf{C}) \\ h(\mathbf{D}) \\ h_x(\mathbf{A}) \\ h_x(\mathbf{B}) \\ h_x(\mathbf{C}) \\ h_x(\mathbf{D}) \\ h_y(\mathbf{A}) \\ h_y(\mathbf{B}) \\ h_y(\mathbf{C}) \\ h_y(\mathbf{D}) \\ h_{xy}(\mathbf{A}) \\ h_{xy}(\mathbf{B}) \\ h_{xy}(\mathbf{C}) \\ h_{xy}(\mathbf{D}) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Hodnoty parciálních a smíšených derivací v bodech  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  však neznáme a musíme je odhadnout (nejčastěji z okolních vzorků DMR), přičemž čím přesněji je odhadneme, tím přesnější bude i výsledná interpolační metoda. Běžně se hodnota první a smíšené derivace stanoví pomocí centrální poměrné diference, nicméně existují i jiné způsoby.

V libovolném bodě  $[i, j] \in \mathcal{D}(h)$  odhadneme pomocí centrální poměrné diference hodnotu parciálních derivací

$$h_x(i, j) = \frac{h(i+1, j) - h(i-1, j)}{2},$$

$$h_y(i, j) = \frac{h(i, j+1) - h(i, j-1)}{2}$$

a hodnotu smíšené derivace

$$h_{xy}(i, j) = \frac{h(i+1, j+1) + h(i-1, j-1) - h(i+1, j-1) - h(i-1, j+1)}{4}.$$

Výsledkem této metody je spojitý terénní reliéf se spojitou první derivací [4] (viz obr. A.1 strana 30).

Tato metoda může být zjednodušena použitím interpolačního polynomu ve tvaru

$$h(x, y) = a_{00} + a_{10}s + a_{01}t + a_{20}s^2 + a_{11}st + a_{02}t^2 + a_{21}s^2t + a_{12}st^2 + a_{30}s^3 + a_{03}t^3 + a_{31}s^3t + a_{13}st^3,$$

ve kterém je třeba určit jen dvanáct koeficientů  $a_{ij}$ , pro jejichž výpočet použijeme pouze funkční hodnoty a hodnoty parciálních derivací v obou směrech v bodech **A**, **B**, **C**, **D**. Není tedy třeba určovat hodnotu smíšených derivací. Výsledkem této metody je spojitý terénní reliéf se spojitou první derivací pouze v bodech  $\in \mathcal{D}(h)$  [5].

### 2.3 Mapování DMR na zeměpisné souřadnice

Doposud jsme nahlíželi na rastrový DMR jen jako na matici výškových bodů, nezapomínali jsme se však tím, jaké jsou jejich zeměpisné souřadnice. Ve většině případů jsou známy zeměpisné souřadnice levého dolního nebo horního výškového bodu a horizontální rozlišení v úhlové (většinou stupňové) míře mezi jednotlivými body DMR. Jedná se tedy o převod z kartézské soustavy souřadnic DMR do geografické soustavy souřadnic. Geografických souřadnicových systémů existuje celá řada. Asi nejnámější je pro nás geografický souřadnicový systém zeměpisná šířka-délka, se kterým budeme dále pracovat.

Předpokládejme DMR s horizontálním rozlišením  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  stupňů a se zeměpisnými souřadnicemi levého dolního vzorku  $(\varphi_0, \lambda_0)$ . Vztah mezi body v systému DMR a systému geografickém můžeme popsat funkcí  $\mathbf{t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pro kterou platí

$$\mathbf{t}(x, y) = (\varphi_0 + y\Delta\varphi, \lambda_0 + x\Delta\lambda) \quad (2.12)$$

a která každému bodu  $[x, y]$  přiřazuje zeměpisné souřadnice. Inverzní funkce k funkci  $\mathbf{t}$ , pro kterou platí

$$\mathbf{t}^{-1}(\varphi, \lambda) = \left[ \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda}, \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta\varphi} \right], \quad (2.13)$$

naopak přiřazuje zeměpisným souřadnicím  $(\varphi, \lambda)$  souřadnice bodu v systému DMR.

Známe-li horizontální rozlišení DMR v úhlové míře, snadno určíme i horizontální rozlišení  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  DMR v míře délkové (většinou metry). To je závislé na zeměpisné šířce, ve které je zjišťováno. Tato vlastnost je dána tím, že obvod rovnoběžek se směrem od rovníku k pólům zmenšuje, v úhlové míře je však ve všech místech stejný. Pro horizontální rozlišení  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  v délkové míře platí

$$\begin{aligned} \Delta x &= R \cos \varphi \Delta\lambda_r, \\ \Delta y &= R \Delta\varphi_r, \end{aligned}$$

kde  $R$  je poloměr referenční koule (viz dále),  $\varphi$  je zeměpisná šířka, ve které rozlišení určíme a  $\Delta\varphi_r$ ,  $\Delta\lambda_r$  je horizontální rozlišení DMR v radiánech.

## 2.4 Aproximace planety Země

Při výpočtech délek, výšek a úhlů na Zemi je třeba její nepravidelný, matematicky nedefinovatelný tvar nahradit některou z tzv. referenčních ploch:

**Geoid** Plocha, na níž má tíhová síla konstantní velikost a která splývá se střední hladinou moře, tj. hladinou, která by vznikla, kdyby na oceány nepůsobily žádné rušivé síly (proudy, vítr, dmutí). Tíhová síla je výslednicí síly přitažlivé a odstředivé a její velikost závisí zejména na rozložení hmoty v zemské kůře, které je nepravidelné. Proto je i tvar geoidu nepravidelný. Je to nejpřesnější popis tvaru Země, avšak matematicky obtížně definovatelný.

**Elipsoid** Matematicky poměrně snadno definovatelný útvar, který slouží pro lokální nebo globální aproximaci geoidu. Nejčasteji se používá zploštělý rotační elipsoid (sferoid), jehož povrch je v kartézském souřadnicovém systému  $xyz$  definován vztahem

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

kde  $a$  je velikost hlavní poloosy a  $b$  je velikost vedlejší poloosy.

**Zemský elipsoid** Slouží pro globální aproximaci geoidu. Střed zemského elipsoidu je shodný s hmotným středem Země a jeho kratší poloosa je shodná s osou rotace Země [6]. V dnešní době je nejpoužívanější elipsoid, který je definovaný geodetickým systémem WGS84 a který je využíván například satelitním navigačním systémem GPS (Global Positioning System).

**Referenční elipsoid** Slouží pro lokální aproximaci části geoidu, na které zpravidla aproximuje tvar geoidu přesněji než zemský elipsoid. Kratší poloosa referenčního elipsoidu je shodná s osou rotace Země [6], jeho střed však nemusí být shodný s hmotným středem Země.

**Referenční koule** Slouží pro lokální nebo globální aproximaci elipsoidu. Má konstantní křivost, což zjednodušuje matematické výpočty oproti elipsoidu. Pro přesné výpočty lze elipsoid lokálně aproximovat referenční koulí v zadaném bodě pro území do poloměru 200 km od zadaného bodu [6]. Při globální aproximaci je možné brát v úvahu například to, aby referenční koule měla stejný objem nebo stejný povrch jako elipsoid.

**Referenční rovina** Tečná rovina k referenční kouli nebo elipsoidu v zadaném bodě. Pro přesné výpočty lze takto aproximovat pro území do průměru 30 km [6] od zadaného bodu.

Vzdálenosti na Zemi, se kterými budou pracovat dále popsané algoritmy hledání tras, budou počítány na referenční kouli, která je lokální aproximací zemského elipsoidu definovaného geodetickým systémem WGS84. Pro poloměr  $R$  referenční koule platí

$$R = \sqrt{MN}, \quad (2.14)$$

kde

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

je meridiánový poloměr křivosti a

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

je příčný poloměr křivosti,  $\varphi$  je zeměpisná šířka, ve které aproximujeme referenční elipsoid,  $a$  je velikost hlavní poloosy a  $e$  je první excentricita referenčního elipsoidu.

## 2.5 SRTM DEM

SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) DEM (Digital Elevation Model) je digitální model reliéfu, na jehož vzniku se společně podílely NASA (National Aeronautics and Space Administration) a NGA (National Geospatial-Intelligence Agency) s přispěním německé a italské vesmírné agentury. Výšková data byla získána v roce 2000 pomocí radarové interferometrie pro oblasti pevniny mezi  $56^\circ$  jižní zeměpisné šířky a  $61^\circ$  severní zeměpisné šířky, což znamená přibližně pro 80% pevniny planety Země. Z nasbíraných výškových dat byl následně vytvořen rastrový DMR s horizontálním rozlišením  $1''$  ( $\approx 30$  m na rovníku).

Validací SRTM dat byly dle [7] pro jednotlivé kontinenty zjištěny následující hodnoty absolutní horizontální chyby (ahe), absolutní vertikální chyby (ave) a relativní vertikální chyby (rve) v metrech, odhadované na 90procentním intervalu spolehlivosti:

	ahe	ave	rve
Afrika	11.9	5.6	9.8
Austrálie	7.2	6.0	4.7
Euroasie	8.8	6.2	8.7
S. Amerika	12.6	9.0	7.0
J. Amerika	9.0	6.2	5.5

Absolutní a relativní vertikální chybu si lze jednoduše představit takto: Označíme  $H_a, H_b$  skutečnou nadmořskou výšku a  $h_a, h_b$  nadmořskou výšku podle DMR v bodě  $a$ , resp.  $b$ . Absolutní vertikální chyba je hodnota  $|H_a - h_a|$ . Relativní vertikální chyba se určuje mezi dvěma body a její hodnota je  $|(H_a - H_b) - (h_a - h_b)|$ . Relativní chyba proto hraje důležitou roli zejména v úlohách, kde je rozhodující pouze tvar terénního reliéfu, např. určování sklonu nebo orientace svahu.

SRTM data jsou veřejnosti zdarma dostupná např. z ftp serveru <http://dds.cr.usgs.gov/srtm/> ve třech úrovních rozlišení:

**SRTM1 DEM** Rastrový DMR s horizontálním rozlišením  $1''$  ( $\approx 30$  m na rovníku) veřejně dostupný jen pro území Spojených států amerických<sup>2</sup>.

**SRTM3 DEM** Rastrový DMR s horizontálním rozlišením  $3''$  ( $\approx 90$  m na rovníku) veřejně dostupný pro oblasti od  $56^\circ$  jižní zeměpisné šířky do  $61^\circ$  severní zeměpisné šířky.

<sup>2</sup>Důvodem, proč jsou data s maximálním rozlišením veřejně dostupná jen pro území Spojených států amerických, je, že tamní ministerstvo obrany nepovoluje zveřejnit data s rozlišením jemnějším než  $3''$  mimo jejich území[8].

**SRTM30 DEM** Rastrový DMR s horizontálním rozlišením  $30''$  ( $\approx 1$  km na rovníku) veřejně dostupný pro oblasti od  $56^\circ$  jižní zeměpisné šířky do  $61^\circ$  severní zeměpisné šířky.

SRTM1 a SRTM3 data jsou organizována do samostatných čtvercových segmentů (angl. tiles), jejichž rozsah je  $1^\circ \times 1^\circ$  zeměpisné šířky a zeměpisné délky. Názvy jednotlivých segmentů přísluší zeměpisným souřadnicím levého dolního vzorku v SRTM1, resp. SRTM3. Například zeměpisné souřadnice levého dolního vzorku segmentu *N49E013.hgt* jsou  $49^\circ$  severní zeměpisné šířky a  $13^\circ$  východní zeměpisné délky. Řádek na severu a jihu, resp. sloupec na západě a východě v daném segmentu je shodný s řádkem, resp. sloupcem na okraji přilehlých segmentů. Každý segment je čistě binární soubor (bez hlavičky) obsahující DMR vybraného území s následujícími parametry:

	<b>SRTM1</b>	<b>SRTM3</b>
Horizontální rozlišení [ $^\circ$ ]	$\Delta\varphi = \Delta\lambda = 0.00027$	$\Delta\varphi = \Delta\lambda = 0.00083$
Vertikální kvantizace [m]	1	1
Horizontální datum	WGS84	WGS84
Vertikální datum	EGM96 Geoid	EGM96 Geoid
Počet řádků	3601	1201
Počet sloupců	3601	1201
Hodnota void	-32768	-32768
Velikost vzorku [B]	2	2
Typ vzorku	signed integer	signed integer
Pořadí bytů	Big Endian	Big Endian



## Kapitola 3

# Algoritmy hledání tras

V této kapitole budou popsány dva algoritmy hledání tras podle zadaného profilu. Prvním algoritmem je *obecný algoritmus hledání tras*, který bere při hledání v úvahu pouze tvar terénního reliéfu, tzn. neuvažuje cesty. Druhý algoritmus je *algoritmus hledání tras po cestách*, který, jak je z jeho názvu patrné, hledá pouze trasy vedoucí po cestách. Dále budou pro snazší a přesnější popis algoritmů vysvětleny často používané pojmy.

*Zeměpisný bod* je libovolný bod v trojrozměrném prostoru, který je určen trojicí  $(\varphi, \lambda, h)$ , kde  $\varphi$  je zeměpisná šířka,  $\lambda$  je zeměpisná délka a  $h$  nadmořská výška tohoto bodu. Zeměpisnou šířku, zeměpisnou délku a nadmořskou výšku v zeměpisném bodě  $p$  budeme značit  $\varphi_p$ ,  $\lambda_p$  a  $h_p$ . *Převýšení* mezi zeměpisnými body  $x, y$  je číslo, které budeme označovat  $\Delta h(x, y)$  a pro které platí

$$\Delta h(x, y) = h_y - h_x.$$

*Profil* je spojitá funkce  $f : \langle 0, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , pro kterou platí  $f(0) = 0$ . Číslo  $d$  je *délka* profilu. *Vertikální rozdíl*  $e$  mezi profilem  $p_1$  o délce  $d_1$  a profilem  $p_2$  o délce  $d_2$  ve vzdálenosti  $s$  od počátku je číslo, pro které platí

$$e = p_2(s) - p_1(s),$$

kde  $s \in \langle 0, d_1 \rangle \cap \langle 0, d_2 \rangle$ . *Celkový vertikální rozdíl*  $E$  mezi profilem  $p_1$  o délce  $d_1$  a profilem  $p_2$  o délce  $d_2$  ve vzdálenosti  $s$  od počátku je číslo, pro které platí

$$E = \int_0^s |p_2(x) - p_1(x)| dx,$$

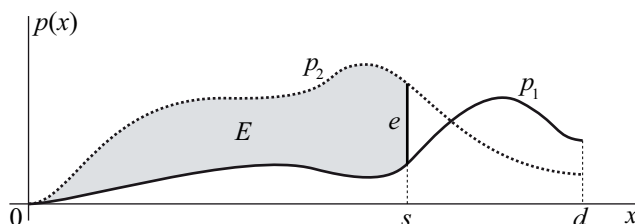
kde  $s \in \langle 0, d_1 \rangle \cap \langle 0, d_2 \rangle$ . Celkový vertikální rozdíl tedy představuje obsah plochy vymezené křivkami obou profilů (viz obr. 3.1).

*Trasa* je spojitá vektorová funkce  $\mathbf{f} : \langle 0, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ , pro niž platí

$$\mathbf{f}(x) = (\varphi(x), \lambda(x), h(x)) \quad \forall x \in \langle 0, d \rangle$$

a jejíž složky jsou po řadě zeměpisná šířka, zeměpisná délka a nadmořská výška ve vzdálenosti  $x$  od začátku trasy. Číslo  $d$  je *délka* trasy. *Profil trasy* je profil  $p$ , pro který platí

$$p(x) = h(x) - h(0),$$



Obrázek 3.1: Profil. Znázornění celkového vertikálního rozdílu  $E$  (zvýrazněná oblast) a vertikálního rozdílu  $e$  mezi profily  $p_1$  a  $p_2$  ve vzdálenosti  $s$  od počátku.

pro všechna  $x \in \langle 0, d \rangle$ .

Abychom mohli hledat trasy podle zadaného profilu, je nutné detailně znát tvar terénního reliéfu (viz kapitola 2) prohledávané oblasti. Terénní reliéf prohledávané oblasti reprezentuje spojitá funkce dvou proměnných  $h$  definovaná na elementární oblasti  $\Omega$  (viz rovnice (2.5)). Kartézský souřadnicový systém, ve kterém je definována funkce  $h$ , budeme nazývat souřadnicovým systémem DMR nebo jen systémem DMR. Vztah mezi body v souřadnicovém systému DMR a geografickém souřadnicovém systému (viz sekce 2.3) je dán funkcí  $t$  (viz rovnice (2.12)), která každému bodu ze systému DMR přiřazuje příslušné zeměpisné souřadnice. Inverzní funkce  $t^{-1}$  k funkci  $t$  (viz vztah (2.13)) naopak přiřazuje zeměpisným souřadnicím příslušné souřadnice bodu v systému DMR. Předpokládejme, že horizontální rozlišení DMR je v úhlové míře  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  a v délkové míře  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ . Jak bylo zmíněno v sekci 2.3, horizontální rozlišení DMR v délkové míře je závislé na zeměpisné šířce, v průběhu hledání trasy však jeho změnu můžeme zanedbat.

Dále je pro měření vzdáleností na Zemi nutné nahradit její nepravidelný tvar některou z referenčních ploch (viz sekce 2.4). Zemi budeme aproximovat referenční koulí, která aproximuje zemský elipsoid WGS84 v zeměpisném bodě, který je středem prohledávané oblasti. Poloměr referenční koule  $R$  určíme rovnicí (2.14).

### 3.1 Obecný algoritmus hledání tras

Algoritmus slouží k hledání tras, které vedou po terénním reliéfu a jejichž profil je co nejvíce podobný zadanému profilu.

**Formulace úlohy** Je dán profil  $p$  o délce  $d$ . Ze zadaného zeměpisného bodu  $p_0$  hledáme takovou trasu, která vede po terénním reliéfu, její délka je  $d$  a pro její profil  $p_t$  platí, že vertikální rozdíl  $e$  mezi profily  $p$  a  $p_t$  v libovolné vzdálenosti  $x \in \langle 0, d \rangle$  splňuje podmínku  $|e| < \varepsilon$ , kde číslo  $\varepsilon$  je tolerance hledání.

Hledání trasy probíhá s krokem o délce  $\Delta s$ , který představuje vzdálenost mezi jednotlivými zeměpisnými body tvořícími nalezenou trasu. Krok  $\Delta s$  je třeba volit tak, aby se nadmořská výška na této vzdálenosti měnila pokud možno lineárně. Čím menší bude  $\Delta s$ , tím přesnější bude i samotné hledání. V závislosti na velikosti  $\Delta s$  je třeba zvolit velikost úhlu  $\alpha$ , který představuje maximální úhel, o který se může změnit směr mezi jednotlivými zeměpisnými body nalezené trasy. Úhel  $\alpha$  budeme dále nazývat maximální změnou směru. Vhodně zvolený úhel  $\alpha$  v závislosti na  $\Delta s$

jinými slovy zabraňuje náhlým změnám směru na nalezené trase. V poslední řadě je nutné zvolit počáteční azimut<sup>1</sup> hledání  $a_0$ , jehož účelem je „nasměrovat“ hledání trasy do požadovaného směru.

Obecný algoritmus hledání tras je iterační algoritmus. Nyní bude popsána jedna iterace, při které je ze zeměpisného bodu  $x$  hledán zeměpisný bod  $y$ , jenž bude následujícím bodem hledané trasy. Aktuální azimut hledání označíme  $a$ . Vzdálenost trasy z počátečního bodu  $p_0$  do bodu  $x$  označíme  $d_x$ .

1. Převědeme zeměpisné souřadnice bodu  $x = (\varphi_x, \lambda_x)$  do systému DMR a azimut hledání  $a$  na jednotkový směrový vektor.

Souřadnicím bodu  $x$  odpovídá v systému DMR bod  $\mathbf{x} = t^{-1}(\varphi_x, \lambda_x)$ . Azimut hledání  $a$  vyjádříme pomocí jednotkového vektoru  $\hat{\mathbf{a}}$ , pro který platí  $\hat{\mathbf{a}} = (\sin a, \cos a)$  a který nazveme směr hledání (viz obr. 3.2).

2. Určíme gradient  $\mathbf{g}$  funkce  $h$  v bodě  $\mathbf{x}$ .

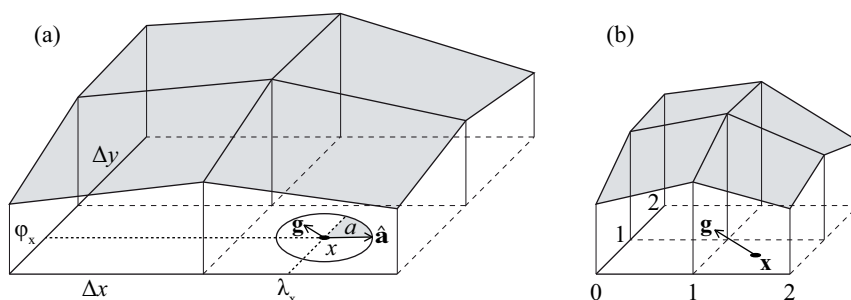
Gradient je vektor parciálních derivací, který udává směr největšího růstu funkce. Pro gradient  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  v bodě  $\mathbf{x}$  tedy platí

$$\mathbf{g} = (h_x(\mathbf{x}), h_y(\mathbf{x})),$$

kde  $h_x, h_y$  jsou parciální derivace funkce  $h$  ve směru osy  $x$ , resp.  $y$ . Zde je třeba si uvědomit, že jsme našli gradient v systému DMR (jednotková vzdálenost mezi výškovými body), proto jeho velikost ani směr neodpovídají jeho skutečné velikosti a směru na zemském povrchu (vzdálenost  $\Delta x, \Delta y$  mezi výškovými body) (viz obr. 3.2). Hodnotu gradientu tedy upravíme tak, aby odpovídala hodnotě na zemském povrchu:

$$\mathbf{g} = (g_x/\Delta x, g_y/\Delta y).$$

Jednotkový vektor gradientu budeme značit  $\hat{\mathbf{g}}$ .



Obrázek 3.2: Grafické znázornění určení gradientu. (a) reprezentace skutečného zemského povrchu, (b) systém DMR. Velikost gradientu v systému DMR neodpovídá velikosti gradientu na zemském povrchu.

<sup>1</sup>Azimut je úhel, který svírá určitý směr se směrem severním. Velikost úhlu je měřena po směru hodinových ručiček. Azimut světových stran je tedy  $0^\circ$  - sever,  $90^\circ$  - východ,  $180^\circ$  - jih,  $270^\circ$  - západ.

3. Odhadneme maximální převýšení  $z_g$ , které je možné překonat z bodu  $x$  na vzdálenosti  $\Delta s$ .

Protože známe směr největšího růstu (gradient) terénního reliéfu, můžeme poměrně dobře odhadnout hodnotu  $z_g$ . Tento odhad provedeme tak, že v okolí bodu  $x$  budeme předpokládat lineární průběh terénního reliéfu, proto, čím více se bude  $\Delta s \rightarrow 0$ , tím přesnější odhad dostaneme. Pro hodnotu  $z_g$  platí

$$z_g = \Delta s |\mathbf{g}|.$$

4. Zjistíme převýšení  $z_r$ , které máme dle zadaného profilu  $p$  překonat z bodu  $x$  do hledaného bodu  $y$ .

Algoritmus se snaží v každém kroku minimalizovat vertikální rozdíl mezi zadaným profilem a profilem nalezené trasy. Výsledná hodnota  $z_r$  je dána vztahem

$$z_r = p(d_x + \Delta s) - \Delta h(p_0, x),$$

kde  $\Delta h(p_0, x)$  je převýšení mezi počátečním bodem  $p_0$  bodem  $x$ .

5. Dle směru hledání  $\hat{\mathbf{a}}$ ,  $z_g$  a  $z_r$  určíme směr postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  do bodu  $y$ .

Označme  $\hat{\mathbf{n}} = (-\hat{a}_y, \hat{a}_x)$  levý normálový vektor ke směru hledání  $\hat{\mathbf{a}}$  a

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matici rotace bodu kolem počátku souřadnicového systému o úhel  $\theta$  proti směru hodinových ručiček.

V první fázi volíme směr postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  v závislosti na požadovaném převýšení  $z_r$  tak, aby se převýšení, které překonáme z bodu  $x$  na vzdálenosti  $\Delta s$  ve zvoleném směru postupu, co nejvíce blížilo požadovanému převýšení. Ve druhé fázi provedeme kontrolu a případanou korekci zvoleného směru postupu v závislosti na podmínkách

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} > \cos \alpha, \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} \rightarrow 1, \quad (3.2)$$

kteří říkají, že odchylka směru hledání  $\hat{\mathbf{a}}$  a směru postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  musí být menší než  $\alpha$  (3.1) a musí být co nejmenší (3.2).

V první fázi zvolíme směr postupu rovnicí

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{cases} \hat{\mathbf{g}} & z_r \geq z_g > 0, \\ -\hat{\mathbf{g}} & z_r \leq -z_g < 0, \\ \hat{\mathbf{g}}\mathbf{R}_\theta & -z_g < z_r < z_g \wedge \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{g}} \leq 0, \\ \hat{\mathbf{g}}\mathbf{R}_\theta^{-1} & -z_g < z_r < z_g \wedge \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{g}} > 0, \\ \hat{\mathbf{a}} & z_g = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

kde úhel rotace  $\theta = \arccos \frac{z_r}{z_g}$ .

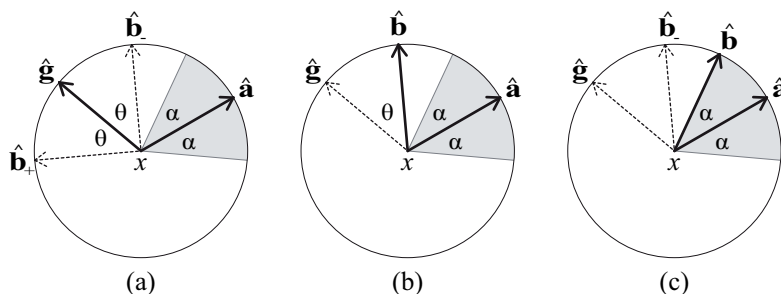
Z rovnice (3.3) vyplývá následující:

- Pokud  $z_r \geq z_g > 0$  nebo  $z_r \leq -z_g < 0$ , pak není možné z bodu  $x$  na vzdálenosti  $\Delta s$  překonat požadované převýšení. Překonáme tedy převýšení největší, resp. nejmenší možné, takže pro směr postupu platí  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{g}}$ , resp.  $\hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{g}}$ .
- Pokud  $-z_g < z_r < z_g$ , pak je možné z bodu  $x$  na vzdálenosti  $\Delta s$  přesně překonat požadované převýšení. Směr postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  je odchýlen o úhel  $\theta = \pm \arccos \frac{z_r}{z_g}$  od směru gradientu  $\hat{\mathbf{g}}$ . Existují tedy právě dva směry postupu. V závislosti na podmínce (3.2) vybereme z těchto dvou směrů pomocí skalárního součinu  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{g}}$  ten, který má menší odchylku od směru hledání  $\hat{\mathbf{a}}$  (viz obr. 3.3).
- Pokud  $z_g = 0$ , pak není možné z bodu  $x$  překonat žádné převýšení. Směr postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  tak může být zcela libovolný, a proto vybereme takový, který splňuje podmínku (3.2), tedy  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}}$ .

Zvolený směr postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  nemusí splňovat podmínku (3.1). Tato podmínka je splněna, pokud odchylka mezi směrem hledání  $\hat{\mathbf{a}}$  a směrem postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  je menší nebo rovna úhlu  $\alpha$ . V opačném případě je nutné provést následující korekci směru postupu

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}\mathbf{R}_\alpha & \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{b}} \geq 0, \\ \hat{\mathbf{a}}\mathbf{R}_\alpha^{-1} & \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{b}} < 0, \end{cases}$$

kteřá změní směr postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  na nejbližší povolený směr v závislosti na podmínce (3.1) (viz obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Grafické znázornění volby směru postupu. Zvýrazněná oblast znázorňuje povolený směr postupu. (a) V závislosti na  $z_g$  a  $z_r$  (případ  $-z_g < z_r < z_g$ ) existují dva směry postupu  $\hat{\mathbf{b}}_+$  a  $\hat{\mathbf{b}}_-$ . (b) Z těchto dvou směrů vybereme ten s menší odchylkou od směru hledání  $\hat{\mathbf{a}}$ . (c) Protože zvolený směr postupu nemá požadovaný směr, provedeme jeho korekci.

## 6. Určíme hledaný zeměpisný bod $y$ .

Hledaný bod  $y$  leží ve vzdálenosti  $\Delta s$  od bodu  $x$ . Ze známého směru postupu  $\hat{\mathbf{b}}$  určíme hodnoty  $dE$  a  $dN$ , pro které platí

$$\begin{aligned} dE &= \Delta s \hat{b}_x, \\ dN &= \Delta s \hat{b}_y \end{aligned}$$

a které představují vzdálenost bodu  $y$  od bodu  $x$  ve východním, resp. severním směru. Zeměpisné souřadnice bodu  $y$  pak jsou

$$\begin{aligned}\varphi_y &= \varphi_x + \frac{180 \cdot dN}{\pi R}, \\ \lambda_y &= \lambda_x + \frac{180 \cdot dE}{\pi R \cos \varphi_x},\end{aligned}$$

kde  $R$  je poloměr referenční koule.

7. Zkontrolujeme, zda nebyla překročena tolerance hledání  $\varepsilon$ .

Vzdálenost trasy z počátečního bodu  $p_0$  do nově nalezeného bodu  $y$  označíme  $d_y$ . Pro vertikální rozdíl  $e$  mezi profilem  $p$  a profilem dosud nalezené trasy  $p_t$  ve vzdálenosti  $d_y$  platí  $e = p_t(d_y) - p(d_y)$ . Pokud bude  $|e| > \varepsilon$ , pak byla překročena tolerance hledání a hledání trasy bylo neúspěšné.

## 3.2 Algoritmus hledání tras po cestách

Výše popsaný algoritmus bere při hledání tras v úvahu pouze tvar terénního reliéfu. Dále bude ukázán algoritmus, který hledá trasy vedoucí pouze po vybraných typech cest.

Společně s popisem terénního reliéfu je pro řešení zadaného problému nutný také popis cest v prohledávané oblasti, jehož nejvhodnějším zdrojem (pro účely tohoto algoritmu) je digitální mapa vektorového formátu. Digitální vektorová mapa popisuje geografické jevy pomocí primitiv, nejčastěji bodů, úseček a polygonů. Cesty jsou v digitální vektorové mapě reprezentovány lomenou čarou, která je tvořena vhodně rozmístěnými body ležícími na cestách. Takto popsanou síť cest je možné reprezentovat např. grafem (viz dále).

**Poznámka** Dále bude namísto slova cesta ve smyslu dálnice, silnice, lesní cesta atp. použit termín pozemní komunikace nebo jen komunikace, a to z toho důvodu, že cestou by v dalším textu mohla být chápána i cesta v grafu jakožto pojem z oboru diskrétní matematiky.

*Síť cest* je ohodnocený graf  $G = (V, E, w)$ , pro jehož množinu vrcholů  $V$  platí:

1. každý vrchol  $v \in V$  reprezentuje zeměpisný bod ležící na pozemní komunikaci,
2.  $V_k \subset V$ , kde  $V_k$  je množina vrcholů, které reprezentují zeměpisné body ležící na rozcestí nebo křižovatce pozemních komunikací. Pro každý stupeň  $d_G(v)$  vrcholu  $v \in V_k$  musí proto platit  $d_G(v) > 2$ .

Množinu hran  $E$  tvoří všechny hrany  $e = \{x, y\}$ ,  $x \neq y$  (smyčky nejsou povoleny) takové, že mezi vrcholy  $x, y$  vede právě jeden (násobné hrany nejsou povoleny) úsek pozemní komunikace, který lze považovat za rovný a na kterém neleží žádný jiný vrchol z  $V$ . Délka tohoto úseku pak představuje váhu  $w(e)$  hrany  $e$  (viz obr. 3.4).

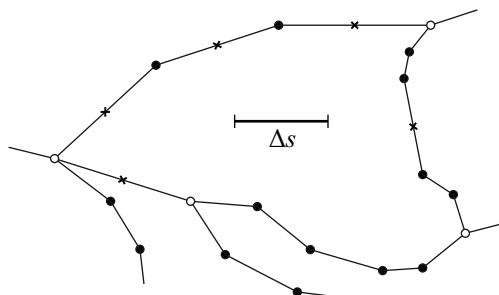
Protože je každý úsek pozemní komunikace vedoucí mezi sousedními vrcholy grafu  $G$  rovný, je přesně znám horizontální průběh pozemních komunikací. Je však potřeba dobře znát i tvar terénního reliéfu, po kterém tyto komunikace vedou, tzn.

jejich vertikální průběh. Budeme požadovat, aby se nadmořská výška na úseku pozemní komunikace mezi libovolnými sousedními vrcholy měnila pokud možno lineárně v závislosti na vzdálenosti. Obecně se dá říci, že čím kratší bude vzdálenost mezi sousedními vrcholy, tím více bude tento požadavek splněn. Zvolíme si kladné číslo  $\Delta s$ , které nazveme *vzorkování* sítě cest. Množinu vrcholů  $V$  pak zvolíme tak, aby pro každou vzniklou hranu  $e \in E$  platilo  $w(e) \leq \Delta s$ , tzn., aby vzdálenost úseku pozemní komunikace mezi sousedními vrcholy nebyla větší než  $\Delta s$  (viz obr. 3.4).

*Délka*  $d$  sítě cest je součet vah všech hran grafu  $G$ . *Hustota* sítě cest je číslo

$$\frac{\sum_{v \in V_k} d_G(v)}{d},$$

kteří představuje poměr mezi součtem stupňů všech vrcholů, jejichž stupeň je větší než dva a délkou sítě cest.



Obrázek 3.4: Grafické znázornění sítě cest. (o) Vrcholy ležící na rozcestí nebo křižovatce pozemních komunikací. (•) Vrcholy, které určují horizontální průběh pozemní komunikace. (x) Vrcholy, které určují vertikální průběh pozemní komunikace a které jsou do sítě cest přidány tak, aby vzdálenost mezi sousedními vrcholy nebyla větší než  $\Delta s$ .

**Formulace úlohy** Je dán profil  $p$  o délce  $d$ . Ve vybrané oblasti hledáme takové trasy  $t$ , které vedou po pozemní komunikaci, jejich délka je  $d$  a pro jejich profil  $p_t$  platí, že vertikální rozdíl  $e$  mezi profily  $p$  a  $p_t$  v libovolné vzdálenosti  $x \in \langle 0, d \rangle$  splňuje podmínku  $|e| < \varepsilon$ , kde číslo  $\varepsilon$  je tolerance hledání.

Ještě než se pustíme do popisu algoritmu, připomeňme, že síť cest je graf se specifickými vlastnostmi (viz výše). Libovolný sled v síti cest pak reprezentuje trasu, která vede po pozemní komunikaci.

Algoritmus prohledává graf, který reprezentuje síť cest, do hloubky (viz algoritmus 1 strana 19). Nehledá však jeden konkrétní vrchol, ale sled, který splňuje požadovaná kritéria. Hlavním kritériem je, aby měla množina hran sledu požadovanou váhu (aby měla nalezená trasa požadovanou délku), která je dána délkou zadaného profilu a aby v průběhu hledání nebyla překročena tolerance hledání (aby se profil nalezené trasy co nejvíce podobal zadanému profilu). Dalším kritériem je omezující požadavek na vlastnost hledaného sledu. Pokud by byl hledán sled bez omezení, pak může vést nalezená trasa vícekrát po stejné komunikaci. Hlavní problém však je, že může oscilovat mezi dvěma body (sousedními vrcholy). Tento problém vyřešíme

tak, že v průběhu hledání zakážeme návrat do naposledy navštíveného sousedního vrcholu (viz algoritmus 1 řádek 7). I přesto může vést nalezená trasa vícekrát po stejné komunikaci, nikdy však neudělá „čelem vzad“. Přísnějším omezením může být požadavek, aby nalezená trasa nikdy nevedla dvakrát po stejné komunikaci, pak hledáme v grafu tah nebo cestu. V případě tahu je dovoleno křížení nalezené trasy, v případě cesty nikoli.

Jak bylo zmíněno výše, algoritmus prohledává síť cest do hloubky, a to pomocí rekurze. Pokud je v dané síti cest nalezen sled splňující požadovaná kritéria, je v průběhu návratu z rekurze (backtrackingu) vytvářen strom, v němž pak každá cesta z kořene do listu reprezentuje nalezenou trasu. Nalezených tras může být z jednoho vrcholu samozřejmě více.

V zadané síti cest jsou požadované sledy hledány „hrubou silou“, hledání je tedy provedeno z každého vrcholu grafu. O časové náročnosti algoritmu rozhoduje počet navštívených vrcholů v průběhu hledání, který je závislý na toleranci hledání, hledaném profilu a na hustotě, vzorkování a délce sítě cest. Paměťová náročnost algoritmu (bez paměti potřebné k uložení nalezených tras) závisí pouze na maximální hloubce rekurze, která je dána délkou hledaného profilu a vzorkováním sítě cest.

```

1 Search( $v, p_v, d_v, e_v, t_v$ )
2   if  $|e_v| > \varepsilon$  then
3     return null // byla překročena tolerance hledání
4   if  $d_v \geq d$  then
5     return  $v$  // byla nalezena trasa
6   root ← null
7   foreach  $n$  je soused  $v$  and  $n \neq p_v$  do
8      $w \leftarrow$  vzdálenost mezi vrcholy  $v$  a  $n$ 
9      $h_v \leftarrow$  nadmořská výška ve vrcholu  $v$ 
10     $h_n \leftarrow$  nadmořská výška ve vrcholu  $n$ 
11     $d_n \leftarrow d_v + w$ 
12     $e_n \leftarrow e_v + h_n - h_v - p(d_n) + p(d_v)$ 
13     $t_n \leftarrow t_v + w \cdot (|e_v| + |e_n|)/2$ 
14    node ← Search( $n, v, d_n, e_n, t_n$ )
15    if node  $\neq$  null then // pokud bylo hledání z vrcholu  $v$  úspěšné
16      if root = null then
17        root ←  $v$ 
18      node je potomek root
19  return root

```

Algoritmus 1: Funkce search vyhledá z libovolného vrcholu ze sítě cest všechny trasy splňující požadovaná kritéria hledání. ( $v$ ) Aktuální vrchol, ( $p_v$ ) předchozí vrchol, ( $d_v$ ) délka trasy ve vrcholu  $v$ , ( $e_v$ ) vertikální rozdíl ve vrcholu  $v$ , ( $t_v$ ) celkový vertikální rozdíl ve vrcholu  $v$ , ( $d_n$ ) délka trasy ve vrcholu  $n$ , ( $e_n$ ) vertikální rozdíl ve vrcholu  $n$ , ( $t_n$ ) celkový vertikální rozdíl ve vrcholu  $n$ , ( $p$ ) profil, ( $d$ ) délka profilu, ( $\varepsilon$ ) tolerance hledání.



Nalezených tras může být v dané oblasti velmi mnoho, mohou si však být vzájemně velice podobné. Uvažme síť cest se vzorkováním  $\Delta s = 10$  m, ve které budeme hledat profil  $p$  o délce  $d = 1$  km, pro který platí  $p(x) = 0$ , pro každé  $x \in \langle 0, d \rangle$  (rovina) s tolerancí  $\varepsilon = 2$  m. Bude-li hledání z vrcholu  $v$  úspěšné, pak je velice pravděpodobné, že bude úspěšné i hledání z jeho sousedních vrcholů, které jsou vzdáleny nanejvýš 10 m od něj. Obecně se mohou nalezené trasy lišit o méně než  $2\Delta s$  metrů. Do značné míry podobné trasy však nejsou žádoucí. Abychom byli schopni určit, kdy si jsou dvě trasy podobné, zavedeme pojem podobnost sledů.

*Podobnost*  $p(S_1, S_2)$  dvou sledů  $S_1, S_2$  v grafu  $G = (V, E, w)$  je číslo  $w(E_1 \cup E_2)$ , kde  $E_1$  je množina hran sledu  $S_1$  a  $E_2$  je množina hran sledu  $S_2$ . Je to tedy součet vah všech hran, které mají oba sledy společné.

Dalším parametrem hledání je tedy maximální podobnost nalezených sledů, kterou budeme označovat  $\theta$  a která představuje maximální celkovou délku všech úseků, které mají dvě nalezené trasy společné. Pro množinu nalezených sledů musí platit, že pro každé dva sledy  $S_1, S_2$  z této množiny je jejich podobnost menší než  $\theta$ . Sledy, které tuto podmínku porušují, nazveme sledy podobné. Stejně tak nazveme trasy, které jsou podobnými sledy reprezentovány.

Jak se však rozhodnout, které z nalezených podobných tras odstranit? Logicky bychom měli odstranit všechny kromě „nejlepší“ trasy. Abychom byli schopni určit, která ze dvou nalezených tras je lepší, je nutné mít k dispozici určitou míru kvality těchto tras. Ta je dána celkovým vertikálním rozdílem mezi zadaným profilem  $p$  a profilem nalezené trasy  $p_t$ , který, jak bylo uvedeno výše (viz obr. 3.1), představuje celkový obsah plochy vymezené křivkami  $p$  a  $p_t$ . V průběhu hledání je pak tato hodnota počítána pomocí numerické integrace lichoběžníkovým pravidlem (viz algoritmus 1 řádek 13).

### 3.3 Shrnutí algoritmů hledání

Zásadní rozdíl mezi dvěma výše popsány algoritmy je, že obecný algoritmus hledá trasu pouze ze zadaného zeměpisného bodu, zatímco algoritmus hledání tras po cestách vyhledá trasy v celém rozsahu vybrané oblasti. Vyhledat trasy v celém rozsahu vybrané oblasti obecným algoritmem hledání by bylo složitější, než je tomu u algoritmu hledání tras po cestách. Největším problémem by byl způsob určování podobnosti nalezených tras, ale také způsob volby počátečních bodů hledání. Trasy nalezené obecným algoritmem jsou tvořeny libovolnými body ve vybrané oblasti (na rozdíl od hledání po cestách, kde je nalezená trasa tvořena pouze body tvořícími síť cest), a proto by jako metrika podobnosti musela být použita např. Fréchetova vzdálenost. Jednou z možností, jak tyto problémy vyřešit, by mohlo být vzorkovat celou prohledávanou oblast s konstatním krokem (vzorky tvoří pravidelný rastr) a hledat trasy, které jsou tvořeny pouze body ležícími na takto vzniklých vzorcích. Tento způsob je analogický se vzorkováním sítě cest, ovšem vzorkována by byla celá oblast. Hluběji jsem se však touto problematikou nezabýval, a to zejména z toho důvodu, že obecný algoritmus hledání má, dle mého názoru, oproti algoritmu hledání tras po cestách menší praktické využití.

Na závěr této kapitoly budou shrnuty veličiny, které se nejvíce podílejí na úspěšnosti hledání tras. V seznamu nebude uveden např. rozsah prohledávané oblasti,

resp. celková délka cest v ní, jejichž pozitivní vliv na nalezení trasy je zřejmý.

**Profil** Hledaný profil musí být volen „s rozumem“ vzhledem k terénnímu reliéfu prohledávané oblasti. Extrémní převýšení nebo extrémně prudké kopce se v krajině vyskytují jen zřídka, a proto budou v průběhu hledání obtížně objevovány. Délka zadaného profilu hraje také zásadní roli, neboť s rostoucí délkou profilu se pravděpodobnost nalezení trasy exponenciálně snižuje.

**Členitost terénního reliéfu** Pokud je terén ve vybrané oblasti dostatečně členitý, máme na rozdíl od terénu rovinatého větší potenciál k překonání převýšení daného vstupním profilem, a tedy i větší pravděpodobnost nalezení trasy. Ve velmi rovinatém terénu prakticky nemá smysl trasy hledat.

**Tolerance hledání** Při zvyšující se toleranci hledání je nalezeno více tras, ovšem s menší přesností. Tolerance hledání je velice důležitý vstupní údaj, a to zejména z pohledu rychlosti algoritmu hledání tras po cestách. Bude-li hodnota tolerance vysoká, může být nalezeno obrovské množství cest (nároky na paměť). Navíc se v průběhu prohledávání sítě cest zvyšuje vzdálenost (hloubka zanoření rekurze), do které se z počátečního vrcholu dostaneme, což mnohdy zásadně prodlouží dobu hledání.

**Hustota sítě cest** Veličina, která představuje poměr mezi počtem rozcestí a křižovatek a celkovou délkou sítě cest. Čím větší je hustota sítě cest, tím více je možných variant, kudy může trasa vést, a tedy i větší šance nalezení trasy. Příkladem velmi husté sítě cest, která je pro hledání ideální, je centrum města.

## Kapitola 4

# Implementace

Implementace programu byla provedena v jazyce C#. Důvodem této volby byl záměr udělat i jednoduchou vizualizaci nalezených tras pomocí Managed DirectX. Realizace tohoto plánu se však zatím neuskutečnila.

Pro fungování obou výše popsaných algoritmů hledání tras je potřeba velké množství vstupních dat a parametrů. Prvotním vstupním parametrem je prohledávaná oblast. Ta je jednoduše reprezentována zeměpisnými souřadnicemi dvou bodů, přičemž první z nich je levý dolní a druhý pravý horní bod prohledávané oblasti. Dále je potřeba načíst a uložit DMR prohledávané oblasti. V paměti počítače je DMR efektivně reprezentován jednorozměrným polem. Efektivita této reprezentace oproti dvourozměrnému poli spočívá v mnohdy rychlejším zjištění adresy požadovaných prvků v paměti. Vstupní profil, tzn. profil, podle kterého budou trasy hledány, je načten z textového souboru, ve kterém je na každém řádku dvojice vzdálenost-výška oddělena bílým znakem.

Pro hledání tras vedoucích po cestách je nutné načíst a uložit také geografická data prohledávané oblasti. Ta jsou získána z projektu OpenStreetMap<sup>1</sup> (OSM) ve formátu XML. OSM XML soubor však může obsahovat velké množství dat, např. pro celou Českou republiku je jeho velikost přes 4 GB. Proto je nutné zpracovat OSM XML soubor proudově a do paměti počítače ukládat jen ta data, která využijeme při hledání, tzn. jen uzly, které tvoří cesty vybraného typu a spadají do vybrané oblasti.

Takto načtená data však ještě nejsou připravena k hledání a je nutné je dále zpracovat. V prvním kroku je nutné přidat na cesty další uzly. Je tak učiněno z toho důvodu, abychom získali co nejvíce informací o tvaru terénu, po kterém cesta vede. Dále je potřeba spočítat vzdálenosti mezi uzly a každému uzlu zjistit jeho sousedy. Tím, že známe sousedy jednotlivých uzlů, jsme síť cest v paměti počítače reprezentovali datovou strukturou graf. V poslední řadě je velice výhodné před začátkem hledání každému uzlu spočítat jeho nadmořskou výšku. Poměrně dosti časově náročné zjišťování nadmořské výšky až v průběhu hledání by mělo na rychlost algoritmu veliký dopad.

---

<sup>1</sup>Projekt OpenStreetMap (<http://www.openstreetmap.org>) založil v roce 2004 Steve Coast z Velké Británie. OpenStreetMap zdarma poskytuje vektorová geografická data, na jejichž tvorbě se může kdokoli podílet. Funguje tedy na stejném principu jako internetová encyklopedie Wikipedie. Geografická data z OpenStreetMap je možno získat jak ve standardním XML formátu, tak ve formátu binárním.

## 4.1 Ovládání programu

Program je spouštěn a ovládán z příkazové řádky. Vzhledem ke skutečně velkému množství vstupních dat a parametrů je jeho ovládání vyřešeno netradičním způsobem. Vstupní data jsou zadávána pomocí čtyř vstupních souborů ve formátu XML. Relativní cesta k těmto souborům je předem stanovena a má tvar `..\res\input\` vzhledem k cestě, na které je uložen spouštěcí soubor programu. Soubor `input.xml` je načten ihned po spuštění a obsahuje informace o prohledávané oblasti a informace potřebné k načtení DMR a cest. Další soubor je `profile.xml`, ze kterého, jak název napovídá, jsou načteny informace o vstupním profilu. Poslední dva soubory `way_search.xml` a `general_search.xml` obsahují parametry hledání tras a je v nich specifikován formát a umístění výstupních souborů. Každý ze vstupních XML souborů obsahuje náповědu ve formě komentáře k jednotlivým elementům a atributům.

Program se ovládá pouze třemi příkazy:

`p` načte vstupní profil ze souboru `profile.xml`.

`gs` spustí obecný algoritmus hledání tras s parametry hledání načtenými ze souboru `general_search.xml`.

`ws` spustí algoritmus hledání tras po cestách s parametry hledání načtenými ze souboru `way_search.xml`.

## 4.2 Vizualizace nalezených tras

Program ukládá nalezené trasy do souboru formátu GPX (GPS eXchanged Format), který vznikl jako společný formát pro přenos GPS dat mezi aplikacemi a na internetu. Jedná se o XML soubor, který popisuje trasy, cesty nebo jednotlivé body zájmu, které je možné zobrazit např. aplikací Google Earth nebo online nástrojem GPS Visualizer.

## Kapitola 5

# Testování a výsledky

Testování funkčnosti celého programu nebylo snadné. Ještě před tím, než bylo možné otestovat samotnou funkčnost algoritmů hledání, bylo třeba zpracovat velké množství vstupních dat. Implementace zpracování vstupních dat se skládala z mnoha kroků (načtení a interpolace DMR, načtení a vzorkování sítě cest, výpočty vzdáleností na Zemi atd.), které byly vesměs velice náchylné na špatně odhalitelné sémantické programorské chyby. K otestování funkčnosti zpracování vstupních dat, ale i samotných algoritmů byl použit program Google Earth a online nástroj GPS Visualizer.

Jako vstupní DMR byl použit SRTM DEM (viz sekce 2.5), jehož relativní vertikální chyba se pohybuje okolo sedmi metrů (dle validace), přičemž rozlišení mezi vzorky je pro území České republiky přibližně  $60 \times 90$  m. Je třeba si uvědomit, že DMR pouze aproximuje skutečný tvar zemského reliéfu. Proto, bude-li výše popsanými algoritmy nalezena nějaká trasa, neznamená to, že v reálu skutečně splňuje požadovaná kritéria.

Testování bylo provedeno ve třech lokalitách, a to v Českém lese (Čerchov), v Norsku (Holmenkollen) a v okolí Plzně.

### 5.1 Oblast Český les

Z bodu, který leží ve výšce 900 m.n.m na úbočí Čerchova, nejvyšší hory Českého lesa, byla obecným algoritmem hledání (nejsou uvažovány cesty) hledána trasa o délce 4 km s konstantním profilem. Nalezená trasa by proto měla vést přesně po 900metrové vrstevnici. Hledání bylo provedeno s krokem  $\Delta s = 10$  m a byla použita jak bilineární, tak bikubická interpolace DMR. K ověření, zda nalezená trasa skutečně kopíruje vrstevnici, byla použita terénní mapa společnosti Google (<http://maps.google.com/?t=p>).

Výsledek tohoto hledání považuji za velice dobrý. Přestože se vrstevnice hledají odlišným způsobem, než jakým pracuje algoritmus hledání tras, je oběma způsoby nalezený průběh vrstevnice téměř totožný (viz obr. A.2 strana 31). Výsledek tohoto hledání také do jisté míry dodává jistotu, že implementace algoritmů načtení a interpolace DMR a algoritmu obecného hledání byla provedena správně.

Dále je na nalezených trasách dobře patrný rozdíl mezi bilineární a bikubickou interpolací DMR. Bikubická interpolace při dostatečně malém kroku  $\Delta s$  zane-

chá hladkou křivku, zatímco interpolace bilineární zanechá křivku do značné míry „kostrbatou“. Je to dáno tím, že bilineární interpolace, oproti bikubické, nezaručuje spojitost derivace. Největší zlomy se na křivce získané bilineární interpolací vyskytují na hranici mezi buňkami DMR. Do jisté míry je tedy možné jejich výskyt očekávat v pravidelných intervalech (viz obr. A.3 strana 31).

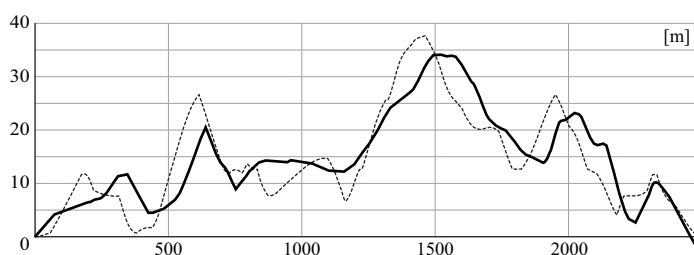
Odhad nadmořské výšky pomocí bikubické interpolace DMR je pro většinu případů (zejména v horských oblastech) přesnější než odhad pomocí interpolace bilineární. Z obrázku A.3 je však patrné, že se průběh nalezených tras při použití bilineární a bikubické interpolace DMR výrazně neliší, proto se nemůže výrazně lišit ani samotný odhad hodnoty nadmořské výšky získaný oběma metodami. Volba interpolační metody v tomto případě zásadně neovlivnila hledání trasy a podobný trend se dá předpokládat pro většinu oblastí, vyjma horských.

## 5.2 Oblast Holmenkollen

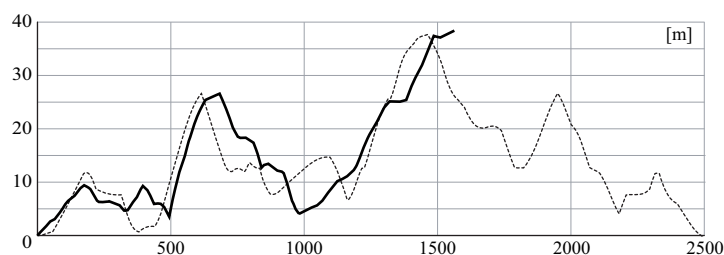
Holmenkollen je lyžařský areál vzdálený asi 7 km severně od norského hlavního města Osla. Tato oblast byla vybrána, protože obsahuje velké množství cest v členitém terénu. Hledání bylo provedeno pouze po cestách a vstupním profilem byl profil lyžařského závodního okruhu, který vede tímto areálem a jehož délka je 2,5 km. Prohledávaná oblast měla dle DMR následující parametry:

Rozsah:  $5,7 \times 7$  km  
 Nejvyšší bod: 545 m  
 Nejnižší bod: 114 m  
 Průměrná výška: 300 m  
 Celková délka cest: 358 km

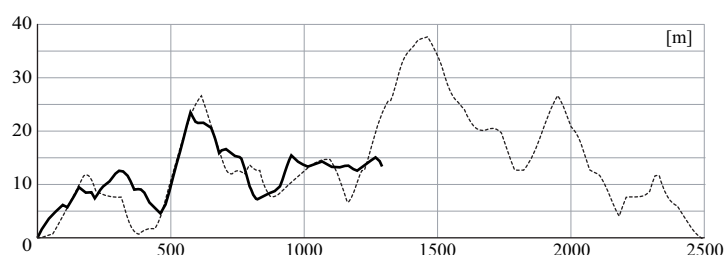
Kompletní trasa byla nalezena až při zvolené toleranci hledání  $\varepsilon = 8$  m (viz obr. 5.1). Nejlepší nalezené trasy, hledané s tolerancí 4, 5, 6 a 7 m, ji překročily již ve vzdálenosti 0,63; 1,03; 1,29; resp. 1,56 km (viz obr. 5.2 a 5.3). Je vidět, že i malá změna tolerance může celé hledání velmi ovlivnit. Horizontální průběh nalezených tras je možné vidět na obrázku A.4 strana 32.



Obrázek 5.1: Srovnání hledaného profilu (---) a profilu nalezené trasy (—) v oblasti Holmenkollen při zvolené toleranci hledání  $\varepsilon = 8$  m.



Obrázek 5.2: Srovnání hledaného profilu (---) a profilu nalezené trasy (—) v oblasti Holmenkollen při zvolené toleranci hledání  $\varepsilon = 7$  m, která byla překročena ve vzdálenosti 1,56 km.



Obrázek 5.3: Srovnání hledaného profilu (---) a profilu nalezené trasy (—) v oblasti Holmenkollen při zvolené toleranci hledání  $\varepsilon = 6$  m, která byla překročena ve vzdálenosti 1,29 km.

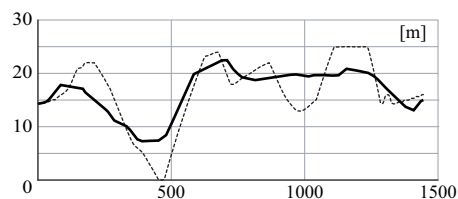
### 5.3 Oblast Krkavec a okolí

Krkavec je vrch poblíž Plzně. Tato oblast byla záměrně vybrána, protože mi je dobře známa, a tak mohu posoudit nalezené trasy také podle vlastních znalostí terénu. Vstupním profilem byl profil lyžařského závodního okruhu, který vede lyžařským areálem na Holmenkollenu a jehož délka je 1,45 km. Prohledávaná oblast měla dle DMR následující parametry:

Rozsah:  $4,6 \times 7$  km  
 Nejvyšší bod: 511 m  
 Nejnižší bod: 296 m  
 Průměrná výška: 385 m  
 Celková délka cest: 156 km

V této oblasti byla kompletní trasa nalezena při zvolené toleranci hledání  $\varepsilon = 7$  m (viz obr. 5.4). Zde jsem však narazil na problém s přesností odhadu nadmořské výšky (viz obr. 2.1). Na obrázku A.5 strana 33 je červenými šipkami vyznačen úsek nalezené trasy, na kterém je překonáno poměrně značné převýšení (viz obr. 5.4 stoupání mezi  $\approx 500$  m a 700 m). Z vlastní zkušenosti ovšem vím, že v tomto úseku vede cesta prakticky po rovině a stoupe jen velice mírně.

Nalezená trasa tedy teoreticky splňuje požadovaná kritéria, prakticky je však podobnost zadaného profilu a profilu nalezené trasy jen velmi malá. Tento závěr jsem



Obrázek 5.4: Srovnání hledaného profilu (---) a profilu nalezené trasy (—) v oblasti Krkavec a okolí při zvolené toleranci hledání  $\varepsilon = 7$  m.

mohl učinit jen proto, že cestu, po které nalezená trasa vede, osobně znám. Reálná přesnost nalezené trasy je ovlivněna pouze dvěma faktory, a to velikostí vzorkování sítě cest (viz sekce 3.2) a přesností odhadu nadmořské výšky v bodech tvořících síť cest. Protože velikost vzorkování sítě cest byla pro toto hledání 10 m, což považuji za dostatečné, musí velmi nízká přesnost nalezené trasy plynout z nepřesného odhadu nadmořské výšky.

Obecně se dá říci, že nepřesnost odhadu nadmořské výšky může být zapříčiněna jak nepřesností DMR, tak chybou interpolace, na níž má největší vliv nízké rozlišení DMR a tvar okolního terénu (viz obr. 2.1). Právě ten má v tomto případě možná největší dopad na nízkou přesnost odhadu nadmořské výšky. Cesta v tomto úseku vede úpatím, přičemž po její jedné straně je relativně prudký svah a po druhé rovina. Při nevhodně rozmístěných výškových bodech v DMR pak může být chyba interpolace velmi vysoká, a to zejména v případě použití bilineární interpolace DMR (viz obr. 2.4).

## 5.4 Shrnutí testování

Jak bylo zmíněno výše, nalezená trasa, která teoreticky splňuje požadovaná kritéria, nemusí splňovat (a většinou nesplňuje) požadovaná kritéria v praxi. Na nesplnění požadovaných kritérií má největší vliv nepřesnost odhadu nadmořské výšky, která je nejvíce ovlivněna přesností DMR a jeho horizontálním rozlišením.

Aby mohla být aplikace reálně využitelná v praxi (viz kapitola 1), byl by dle mého názoru třeba velmi přesný DMR s horizontálním rozlišením  $\approx 10 \times 10$  m. Navíc by trasa musela být nalezena při zvolené toleranci  $\varepsilon < 1$  m. Vezmeme-li v úvahu výsledky testování, při kterém byly trasy vyhledány až při zvolené toleranci  $\varepsilon \approx 7$  m, je požadavek tolerance  $\varepsilon < 1$  m velmi přísný a jen obtížně splnitelný. Je ovšem třeba dodat, že trasy byly hledány podle profilů skutečných lyžařských závodních tratí, na kterých se často vyskytují prudká stoupání a sjezdy a které jsou obecně velmi členité. Naproti tomu síť cest, ve které byly trasy hledány, téměř výhradně obsahuje cesty, které slouží k účelům dopravy nebo turistiky, a proto vznikaly tak, aby byl jejich průběh pro člověka co nejvíce pohodlný. Takto vzniklé cesty vedou většinou po rovině a neobsahují prudká stoupání a klesání (na rozdíl od lyžařských tratí), a proto je pravděpodobnost nalezení trasy podle profilu lyžařské závodní trati v takovéto síti cest velice nízká.



## Kapitola 6

### Závěr

V této práci byly podrobně popsány dva algoritmy hledání tras v závislosti na zadaném výškovém profilu. Konkrétně obecný algoritmus hledání (při hledání neuvažuje cesty) a algoritmus hledání po cestách. Oba algoritmy dokáží hledat trasy s libovolnou přesností. Limitujícím faktorem přesnosti nalezených tras je pouze kvalita vstupních dat, zejména pak kvalita rastrového DMR, se kterým algoritmy pracují. Byla popsána také problematika interpolace rastrového DMR, která je pro algoritmy hledání naprosto zásadní.

Oba algoritmy hledání byly implementovány a testovány na reálných datech. K ověření horizontálního i vertikálního průběhu nalezených tras byly většinou použity produkty společnosti Google, mnohdy však postačily vlastní znalosti terénu. Testování ukázalo, že kvalita DMR (horizontální rozlišení  $\approx 90 \times 90$  m, relativní vertikální chyba  $\approx 7$  m), se kterým algoritmy pracují, je většinou nedostatečná. To má za následek mnohdy nezanedbatelný rozdíl mezi odhadnutou a skutečnou hodnotou nadmořské výšky, který může zásadně ovlivnit výsledek hledání. Existují samozřejmě i přesnější DMR, ty však většinou nejsou globálního rozsahu nebo nejsou veřejnosti snadno dostupné. Nicméně je v tomto směru výhled do budoucna příznivý. Již nyní je na oběžné dráze německý satelit sbírající data, ze kterých by měl v roce 2014 vzniknout globální DMR s horizontálním rozlišením  $\approx 12 \times 12$  m a relativní vertikální chybou  $< 2$  m pro celý povrch planety Země.

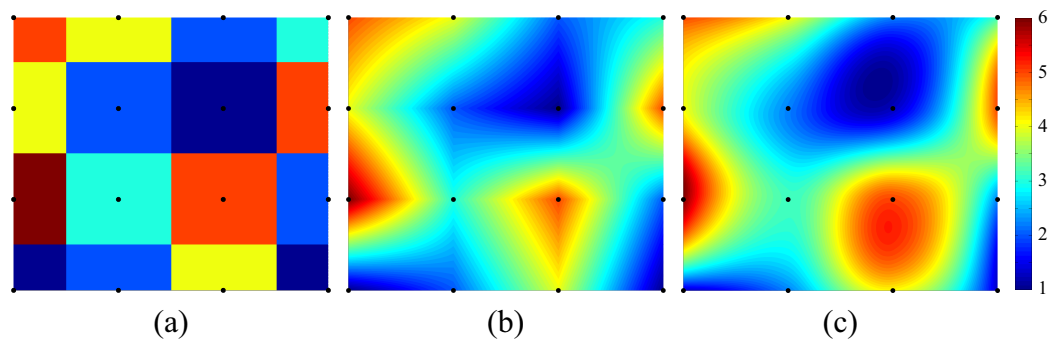
Do budoucna by mohly být vytvořeny algoritmy, které hledají trasy podle jiných kritérií než jen podle zadaného profilu. Mohly by být hledány např. okruhy o požadované délce nebo trasy vedoucí pouze do kopce atp.

# Literatura

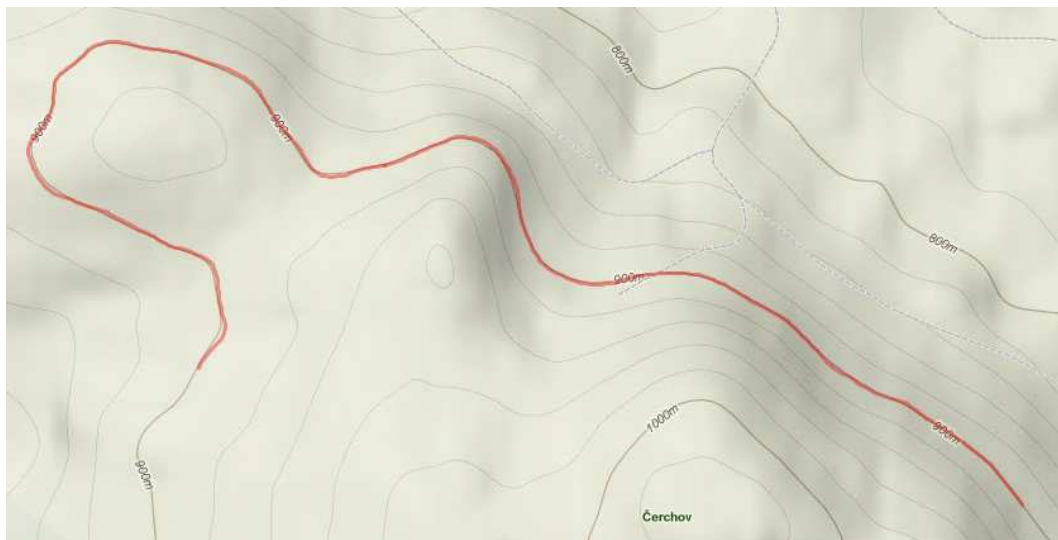
- [1] Karel Jedlička. osobní konzultace, leden 2011.
- [2] Jiří Žára et al. *Moderní počítačová grafika (2. vydání)*. Computer Press, Brno, 2005.
- [3] Petr Rapant. *Geoinformatika a geoinformační technologie*. VŠB - Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2006.
- [4] William S. Russell. Polynomial Interpolation Schemes for Internal Derivative Distributions on Structured Grids. *Applied Numerical Mathematics*, 17:129–171, May 1995.
- [5] D. Kidner et al. What's the Point? Interpolation and Extrapolation with a Regular Grid DEM. GeoComputation Conference, 1999. dostupné na [http://www.geocomputation.org/1999/082/gc\\_082.htm](http://www.geocomputation.org/1999/082/gc_082.htm).
- [6] Václav Čada. Přednáškové texty z geodézie, 2007. dostupné na <http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/index.html>.
- [7] Ernesto Rodríguez et al. An Assessment of the SRTM Topographic Products. Technical Report JPL D-31639, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 2005. dostupné na [http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/SRTM\\_D31639.pdf](http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/SRTM_D31639.pdf).
- [8] T. G. Farr et al. The Shuttle Radar Topography Mission. *Reviews of Geophysics*, 45, 2007. dostupné na [http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/SRTM\\_paper.pdf](http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/SRTM_paper.pdf).

## Příloha A

### Obrazová příloha



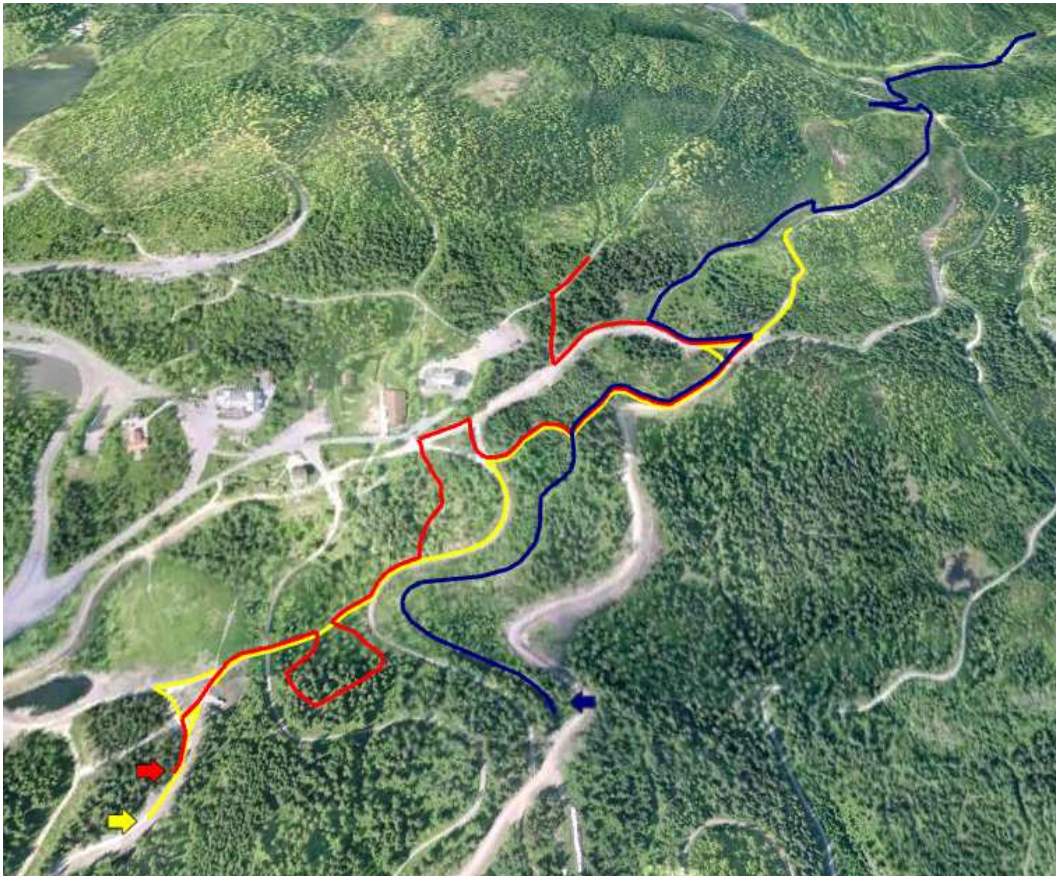
Obrázek A.1: Znáornění (a) interpolace nejbližším susedem, (b) bilineární interpolace, (c) bikubické interpolace. (●) Výškový bod DMR. Hodnoty výškových bodů pro (a), (b) i (c) jsou shodné. Barva znázorňuje interpolací odhadnutou hodnotu. Zdroj: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)



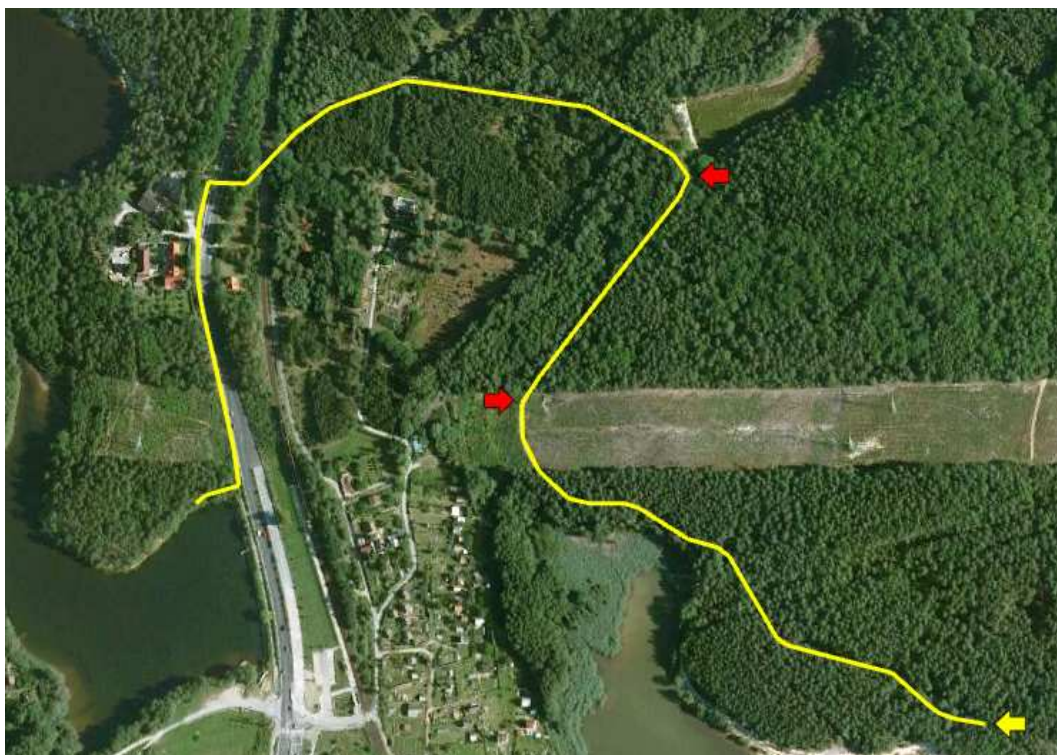
Obrázek A.2: Porovnání nalezené trasy (červená) při použití bikubické interpolace DMR s terénní mapou společnosti Google. Průběh nalezené trasy odpovídá červené trase na obrázku A.3.



Obrázek A.3: Porovnání vlivu bilineární (žlutá) a bikubické (červená) interpolace DMR na průběh nalezené trasy.



Obrázek A.4: Trasy nalezené v oblasti Holmenkollen algoritmem hledání tras po cestách. Hledaný profil je znázorněn na obrázku 5.1. Trasa nalezená s tolerancí hledání  $\varepsilon = 6$  m překročené ve vzdálenosti 1,29 km (žlutá). Trasa nalezená s tolerancí hledání  $\varepsilon = 7$  m překročené ve vzdálenosti 1,56 km (červená). Kompletní trasa nalezená s tolerancí hledání  $\varepsilon = 8$  m (modrá). Šipka označuje začátek trasy.



Obrázek A.5: Trasa nalezená v oblasti Krkavec a okolí algoritmem hledání tras po cestách s tolerancí hledání  $\varepsilon = 7$  m. Hledaný profil je znázorněn na obrázku 5.4. Mezi červenými šipkami je úsek nalezené trasy, na kterém došlo k velké chybě odhadu nadmořské výšky. Žlutá šipka označuje začátek trasy.